Décroissance de l'énergie locale de l'équation de Klein Gordon critique

Ahmed Bchatnia

Faculté des Sciences de Tunis
Université de Tunis El Manar

Plan de la présentation

Indroduction et position du problème

On s'intéresse à **l'équation de Klein Gordon avec une nonlinéarité critique localisée :**

$$(E)\begin{cases} \Box u + \chi_1 u + \chi_2 u^5 = 0 \text{ sur } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \\ u(0,x) = u^0(x) \in H^1(\mathbb{R}^3) \text{ et } \partial_t u(0,x) = u^1(x) \in L^2(\mathbb{R}^3), \end{cases}$$

Où $\Box = \partial_t^2 - \triangle$, χ_1 et χ_2 sont des fonctions positives, de classe C^1, et à support compact tel que $supp\chi_1 \cup supp\chi_2 \subset B_R$ pour $R > 0$ et satisfont

$$x \cdot \nabla\chi_1(x) \leq 0 \quad \text{and} \quad x \cdot \nabla\chi_2(x) \leq 4,\ \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

- Existence et unicité dans l'espace

$$C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^5_{loc}(\mathbb{R}, L^{10}(\mathbb{R}^3))$$

(Grillakis (90) et Shatah-Struwe (94))

Indroduction et position du problème

On s'intéresse à **l'équation de Klein Gordon avec une nonlinéarité critique localisée :**

$$(E)\begin{cases} \Box u + \chi_1 u + \chi_2 u^5 = 0 \text{ sur } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \\ u(0,x) = u^0(x) \in H^1(\mathbb{R}^3) \text{ et } \partial_t u(0,x) = u^1(x) \in L^2(\mathbb{R}^3), \end{cases}$$

Où $\Box = \partial_t^2 - \triangle$, χ_1 et χ_2 sont des fonctions positives, de classe C^1, et à support compact tel que $supp\chi_1 \cup supp\chi_2 \subset B_R$ pour $R > 0$ et satisfont

$$x\cdot\nabla\chi_1(x) \leq 0 \quad \text{and} \quad x\cdot\nabla\chi_2(x) \leq 4,\ \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

- Existence et unicité dans l'espace

$$C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^5_{loc}\left(\mathbb{R}, L^{10}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$$

(Grillakis (90) et Shatah-Struwe (94))

Indroduction et position du problème

On définit l'énergie globale de u à l'instant t par

$$\begin{aligned} E(u(t)) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\partial_t u\,(t)|^2 + |\nabla_x u\,(t)|^2 + \chi_1(x)|u|^2\right) dx \\ &+ \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} \chi_2(x)\,|u\,(t)|^6\, dx. \end{aligned}$$

On définit l'énergie locale par

$$\begin{aligned} E_\rho(u(t)) &= \frac{1}{2}\int_{B_\rho}\left(|\partial_t u\,(t)|^2 + |\nabla_x u\,(t)|^2 + \chi_1(x)|u|^2\right) dx \\ &+ \frac{1}{6}\int_{B_\rho} \chi_2(x)\,|u\,(t)|^6\, dx. \end{aligned}$$

Objectif : Etudier le comportement de l'énergie locale pour t assez grand.

Historique

✓ Morawetz (68) Klein-Gordon semi linéaire.

✓ B. Dehman-P. Gérard (02) Klein-Gordon critique stabilisé à l'infini.

✓ Bchatnia (12) Ondes critiques localisées.
✓ R. Nunes-W. Bastos (2014) Klein-Gordon linéaire.

✓ Malloug (2015) Klein-Gordon amortie dans un domaine extérieur.

✓ N. Burq-R. Joly (2016) Klein-Gordon amortie dans un domaine non borné.

Historique

✓ Morawetz (68) Klein-Gordon semi linéaire.

✓ B. Dehman-P. Gérard (02) Klein-Gordon critique stabilisé à l'infini.

✓ Bchatnia (12) Ondes critiques localisées.
✓ R. Nunes-W. Bastos (2014) Klein-Gordon linéaire.

✓ Malloug (2015) Klein-Gordon amortie dans un domaine extérieur.

✓ N. Burq-R. Joly (2016) Klein-Gordon amortie dans un domaine non borné.

Historique

✓ Morawetz (68) Klein-Gordon semi linéaire.

✓ B. Dehman-P. Gérard (02) Klein-Gordon critique stabilisé à l'infini.

✓ Bchatnia (12) Ondes critiques localisées.
✓ R. Nunes-W. Bastos (2014) Klein-Gordon linéaire.

✓ Malloug (2015) Klein-Gordon amortie dans un domaine extérieur.

✓ N. Burq-R. Joly (2016) Klein-Gordon amortie dans un domaine non borné.

Historique

✓ Morawetz (68) Klein-Gordon semi linéaire.

✓ B. Dehman-P. Gérard (02) Klein-Gordon critique stabilisé à l'infini.

✓ Bchatnia (12) Ondes critiques localisées.
✓ R. Nunes-W. Bastos (2014) Klein-Gordon linéaire.

✓ Malloug (2015) Klein-Gordon amortie dans un domaine extérieur.

✓ N. Burq-R. Joly (2016) Klein-Gordon amortie dans un domaine non borné.

Historique

✓ Morawetz (68) Klein-Gordon semi linéaire.

✓ B. Dehman-P. Gérard (02) Klein-Gordon critique stabilisé à l'infini.

✓ Bchatnia (12) Ondes critiques localisées.
✓ R. Nunes-W. Bastos (2014) Klein-Gordon linéaire.

✓ Malloug (2015) Klein-Gordon amortie dans un domaine extérieur.

✓ N. Burq-R. Joly (2016) Klein-Gordon amortie dans un domaine non borné.

Historique

✓ Morawetz (68) Klein-Gordon semi linéaire.

✓ B. Dehman-P. Gérard (02) Klein-Gordon critique stabilisé à l'infini.

✓ Bchatnia (12) Ondes critiques localisées.
✓ R. Nunes-W. Bastos (2014) Klein-Gordon linéaire.

✓ Malloug (2015) Klein-Gordon amortie dans un domaine extérieur.

✓ N. Burq-R. Joly (2016) Klein-Gordon amortie dans un domaine non borné.

Résultat principal

Théorème 1 (B-Mehenaoui)

Soit $R > 0$, il existe deux constantes C et α strictement positives telles que

$$E_R(u)(t) \leq Ce^{-\alpha t} E(u)(0)$$

pour toute solution u de (E) dont la donnée initiale $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ est supportée dans B_R.

Remarque 1

Ce résultat reste vrai dans le cas où le domaine est un extérieur d'un obstacle convexe.

Stratégie :

- $u \in L^q(\mathbb{R}_+, L^r(\mathbb{R}^3))$ pour tout $q > 2$ et r telle que $\frac{1}{q} + \frac{3}{r} = \frac{1}{2}$.

- ↘↘ exp de l'énergie locale de : $\Box u + \chi_1 u = 0$

- ↘↘ exp de l'énergie locale de : $\Box u + \chi_1 u + \chi_2 u^5 = 0$.

Normes de Strichartz globales en temps

On construit un multiplicateur adéquat pour l'équation de Klein Gordon non-linéaire

$$Lu = (-t\partial_t + x \cdot \nabla + 1)u$$

et on montre :

Proposition 1

Soit u solution de (E), *alors*

$$\int_{\mathbb{R}^3} \chi_2(x)\,|u(t,x)|^6\,dx \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

pour tout $q > 2$ *et* r *telle que* $\frac{1}{q} + \frac{3}{r} = \frac{1}{2}$.

Normes de Strichartz globales en temps

Théorème 2 (J.Zhang-J.Zheng(2018))

On suppose que u est la solution du problème de Cauchy :

$$(S)\begin{cases} \partial_{tt}^2 u - \triangle u + u = F(t,x) \ \ (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \\ u(0) = u_0(x) \in H^1(\mathbb{R}^3) \ \textit{et} \ \ \partial_t u(0) = u_1(x) \in L^2(\mathbb{R}^3) \end{cases}$$

alors

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R},L^r(\mathbb{R}^3))} \leq E(u)(0)^{1/2} + \|F\|_{L^1(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^3))},$$

où $(q,r) \in [2,+\infty]$ *vérifie la condition d'admissibilité avec* $0 \leq \theta \leq 1$

$$\frac{2}{q} + \frac{2+\theta}{r} \leq \frac{2+\theta}{2} \quad (q,r,\theta) \neq (2,\infty,0)$$

et la condition

$$\frac{1}{q} + \frac{3+\theta}{r} = \frac{1+\theta}{2}$$

Normes de Strichartz globales en temps

En appliquant le théorème précédent à la solution u sur un intervalle $[T, S]$, avec $q = 4$, $r = 12$ on obtient

$$\|u\|_{L^4_{[T,S]}(L^{12})} \leq C_r(E(u)(T)^{1/2} + \|u\|_{L^\infty_{[T,S]}(L^6)} \|u\|^4_{L^4_{[T,S]}(L^{12})})$$

Lemme 1

Soit $M(t)$ une fonction continue positive sur $[T, S]$, telle que

$$M(t) \leq a + b(M(t))^\theta \quad \forall t \in [T, S]$$

$a, b > 0$, $\theta > 1$ *vérifiant* $a < (1 - \frac{1}{\theta})\frac{1}{(\theta b)^{\frac{1}{\theta-1}}}$ *et* $M(T) \leq \frac{1}{(\theta b)^{\frac{1}{\theta-1}}}$

alors

$$M(t) \leq \frac{\theta}{\theta - 1}a, \quad \forall t \in [T, S].$$

Normes de Strichartz globales en temps

En appliquant le théorème précédent à la solution u sur un intervalle $[T, S]$, avec $q = 4$, $r = 12$ on obtient

$$\|u\|_{L^4_{[T,S]}(L^{12})} \leq C_r\big(E(u)(T)^{1/2} + \|u\|_{L^\infty_{[T,S]}(L^6)}\,\|u\|^4_{L^4_{[T,S]}(L^{12})}\big)$$

Lemme 1

Soit $M(t)$ une fonction continue positive sur $[T, S]$, telle que

$$M(t) \leq a + b(M(t))^\theta \quad \forall t \in [T, S]$$

$a, b > 0$, $\theta > 1$ *vérifiant* $a < (1 - \frac{1}{\theta})\frac{1}{(\theta b)^{\frac{1}{\theta-1}}}$ *et* $M(T) \leq \frac{1}{(\theta b)^{\frac{1}{\theta-1}}}$

alors

$$M(t) \leq \frac{\theta}{\theta - 1}a, \quad \forall t \in [T, S].$$

On choisit T assez grand tel que les conditions du lemme bootstrap soient satisfaites, d'où il existe T assez grand tel que

$$\|u\|_{L^4([T,+\infty[,L^{12}(\mathbb{R}^3))} \leq CE^{\frac{1}{2}}(u)(0)$$

donc

$$u \in L^q\left(\mathbb{R}_+, L^r\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$$

La décroissance exponentiel de l'énergie locale de l'équation de Klein Gordon linéaire localisée

On considère maintenant le système suivant :

$$(E')\begin{cases} \Box u + \chi_1 u = 0 \text{ sur } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \\ u(0,x) = u^0(x) \in H^1(\mathbb{R}^3) \text{ et } \partial_t u(0,x) = u^1(x) \in L^2(\mathbb{R}^3), \end{cases}$$

χ_1 est positive, classe C^1 et à support compact.

Théorème 3 (B-Mehenaoui)

Soit $R > 0$, il existe deux constantes C et α strictement positives telles que

$$E_R(u)(t) \leq Ce^{-\alpha t}E(u)(0)$$

pour toute solution u de (E) dont la donnée initiale $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ est supportée dans B_R.

La décroissance exponentiel de l'énergie locale de l'équation de Klein Gordon linéaire localisée

On considère maintenant le système suivant :

$$(E')\begin{cases} \Box u + \chi_1 u = 0 \text{ sur } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \\ u(0,x) = u^0(x) \in H^1(\mathbb{R}^3) \text{ et } \partial_t u(0,x) = u^1(x) \in L^2(\mathbb{R}^3), \end{cases}$$

χ_1 est positive, classe C^1 et à support compact.

Théorème 3 (B-Mehenaoui)

Soit $R > 0$, il existe deux constantes C et α strictement positives telles que

$$E_R(u)(t) \leq Ce^{-\alpha t}E(u)(0)$$

pour toute solution u de (E) dont la donnée initiale $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ est supportée dans B_R.

Outils de démonstration

La théorie de Lax-Phillips

$D_+ = \{\varphi \in H\,;\ U(t)\varphi = 0 \text{ sur } |x| \leq t + R,\ t \geq 0\}$
$D_- = \{\varphi \in H\,;\ U(t)\varphi = 0 \text{ sur } |x| \leq -t + R,\ t \leq 0\}$
$U(t)$ est le groupe linéaire d'onde libre. R est un réel strictement positif, tel que B_R contient le support de χ_1.
On définit le semi-groupe de Lax et Phillips adapté pour l'équation de Klein Gordon linéaire par

$$Z_{KG}(t) = P^+ U_{KG}(t) P^- \text{ pour } t \geq 0.$$

où P^+ et P^- sont respectivement les projecteurs orthogonaux sur $\left(D_+^R\right)^\perp$ et $\left(D_-^R\right)^\perp$.

Outils de démonstration

La théorie de Lax-Phillips

$D_+ = \{\varphi \in H\,;\ U(t)\varphi = 0 \text{ sur } |x| \leq t + R,\ t \geq 0\}$

$D_- = \{\varphi \in H\,;\ U(t)\varphi = 0 \text{ sur } |x| \leq -t + R,\ t \leq 0\}$

$U(t)$ est le groupe linéaire d'onde libre. R est un réel strictement positif, tel que B_R contient le support de χ_1.

On définit le semi-groupe de Lax et Phillips adapté pour l'équation de Klein Gordon linéaire par

$$Z_{KG}(t) = P^+ U_{KG}(t) P^- \text{ pour } t \geq 0.$$

où P^+ et P^- sont respectivement les projecteurs orthogonaux sur $\left(D_+^R\right)^\perp$ et $\left(D_-^R\right)^\perp$.

Outils de démonstration

Proposition 2

1) $Z_{KG}(t)D_+ = Z_{KG}(t)D_- = \{0\}$, *pour tout* $t \geq 0$.
2) $Z_{KG}(t)$ *opère sur* $K = (D_+)^\perp \cap (D_-)^\perp$.
3) $(Z_{KG}(t))_{t\geq 0}$ *est semi-groupe continue sur* K.

Lemme 2

On a

a) $U_{KG}(t)D_-^\perp \subset D_-^\perp$ *et* $U(t)D_-^\perp \subset D_-^\perp$ *pour tout* $t \geq 0$
b) $U(t)D_-^\perp \subset D_+$ *pour tout* $t \geq 2R$
c) *si on pose* $M = U_{KG}(2R) - U(2R)$ *alors on a*

$$M\varphi = 0 \quad pour\ |x| \geq 3R \quad et\ \|M\varphi\| \leq 2\|\varphi\|_{5R}$$

d) $Z_{KG}(t) = P^+ M U_{KG}(t - 4R) M P^-$, $\forall t \geq 4R$.

Outils de démonstration

Proposition 2

1) $Z_{KG}(t)D_+ = Z_{KG}(t)D_- = \{0\}$, *pour tout* $t \geq 0$.
2) $Z_{KG}(t)$ *opère sur* $K = (D_+)^\perp \cap (D_-)^\perp$.
3) $(Z_{KG}(t))_{t\geq 0}$ *est semi-groupe continue sur* K.

Lemme 2

On a

a) $U_{KG}(t)D_-^\perp \subset D_-^\perp$ *et* $U(t)D_-^\perp \subset D_-^\perp$ *pour tout* $t \geq 0$
b) $U(t)D_-^\perp \subset D_+$ *pour tout* $t \geq 2R$
c) *si on pose* $M = U_{KG}(2R) - U(2R)$ *alors on a*

$$M\varphi = 0 \quad \textit{pour } |x| \geq 3R \quad \textit{et } \|M\varphi\| \leq 2\|\varphi\|_{5R}$$

d) $Z_{KG}(t) = P^+ M U_{KG}(t-4R) M P^-$, $\forall t \geq 4R$.

Outils de démonstration

Théorème 4 (R.S.O.Nunes-W.D Bastos(2014))

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ un domaine borné. Il existe des constantes positives $T_0 > d(\Omega)$ et $K > 0$ dépendent de Ω, c et T_0 telle que pour tout $u_0, u_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec $\mathrm{supp} u_0, \mathrm{supp} u_1 \subset \Omega$,la solution u du probléme de Cauchy (E') vérifie

$$E(u(t)) \leq \frac{K}{t^n}\{\|u_0\|^2_{H^1(\Omega)} + \|u_1\|^2_{L^2(\Omega)}\}$$

pour chaque $t > T_0$.

Démonstration

Si $\varphi \in H$ / supp(φ)$\subset B_R$, alors $\varphi \in K$ et par conséquent $Z_{KG}(t)\varphi = U_{KG}(t)\varphi$ sur B_R et par suite

$$\|U_{KG}(t)\varphi\|_R = \|Z_{KG}(t)\varphi\|_R \leq \|Z_{KG}(t)\varphi\|$$

Ainsi pour avoir la décroissance exponentielle de l'énergie locale il suffit de prouver celle de $\|Z_{KG}(t)\|$.

Théorème 3($\searrow\searrow$ polynomiale)$\Rightarrow$ pour T suffisamment grand, on a

$$\|U_{KG}(t)g\|_{5R} \leq \frac{1}{8}\|g\|, \qquad g \in H_{5R},$$

Démonstration

Si $\varphi \in H$ / supp$(\varphi) \subset B_R$, alors $\varphi \in K$ et par conséquent $Z_{KG}(t)\varphi = U_{KG}(t)\varphi$ sur B_R et par suite

$$\|U_{KG}(t)\varphi\|_R = \|Z_{KG}(t)\varphi\|_R \leq \|Z_{KG}(t)\varphi\|$$

Ainsi pour avoir la décroissance exponentielle de l'énergie locale il suffit de prouver celle de $\|Z_{KG}(t)\|$.

Théorème 3(↘↘ polynomiale)⇒ pour T suffisamment grand, on a

$$\|U_{KG}(t)g\|_{5R} \leq \frac{1}{8}\|g\|, \qquad g \in H_{5R},$$

En appliquant le Lemme précédent on a

$$\begin{aligned}\|Z_{KG}(T+4R)\varphi\| &= \|P^{+}MU_{KG}(T)MP^{-}\varphi\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|\varphi\|\end{aligned}$$

On pose $T' = T + 4R$; soit $t > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $kT' \leq t \leq (k+1)T'$ et on déduit

$$\|Z_{KG}(t)\varphi\| \leq \|Z_{KG}(kT')\varphi\| \leq \|Z_{KG}(T')\varphi\|^{k} \leq (\frac{1}{2})^{k}\|\varphi\| \leq Ce^{-\alpha t}\|\varphi\|.$$

- Formule de Duhamel :

$$u(t) = U_L(t)\psi + \int_0^t U_L(t-s) I \chi_2 u^5(s) ds, \tag{1}$$

- Théorème 2 (↘↘ exponentiel de KGL)⇒

$$\|Ku\|_{L^\infty_{(t)}(E)} \leq \|KU_L(t)\psi\|_{L^\infty_{(t)}(E)} + C \int_0^t e^{-\beta(t-s)} \|\chi_2 u^5\|_{L^1_{(s)}(L^2)} ds, \tag{2}$$

- En utilisant le fait que les normes de Strichartz sont globales en temps et l'inégalité de Sobolev, on obtient

$$\|\chi_2 u^5\|_{L^1(I,L^2)} \leq C \|\chi_2^{1/6} u\|^{5/2}_{L^\infty(I,L^6)} \leq C\varepsilon^{3/2} \|Ku\|_{L^\infty(I,E)}. \tag{3}$$

- Formule de Duhamel :

$$u(t) = U_L(t)\psi + \int_0^t U_L(t-s) I \chi_2 u^5(s) ds, \qquad (1)$$

- Théorème 2 (↘↘ exponentiel de KGL)⇒

$$\|Ku\|_{L^\infty_{(t)}(E)} \leq \|KU_L(t)\psi\|_{L^\infty_{(t)}(E)} + C \int_0^t e^{-\beta(t-s)} \|\chi_2 u^5\|_{L^1_{(s)}(L^2)} ds, \qquad (2)$$

- En utilisant le fait que les normes de Strichartz sont globales en temps et l'inégalité de Sobolev, on obtient

$$\|\chi_2 u^5\|_{L^1(I,L^2)} \leq C \|\chi_2^{1/6} u\|^{5/2}_{L^\infty(I,L^6)} \leq C\varepsilon^{3/2} \|Ku\|_{L^\infty(I,E)}. \quad (3)$$

- Formule de Duhamel :

$$u(t) = U_L(t)\psi + \int_0^t U_L(t-s) I \chi_2 u^5(s) ds, \tag{1}$$

- Théorème 2 (↘↘ exponentiel de KGL)⇒

$$\|Ku\|_{L^\infty_{(t)}(E)} \leq \|KU_L(t)\psi\|_{L^\infty_{(t)}(E)} + C \int_0^t e^{-\beta(t-s)} \|\chi_2 u^5\|_{L^1_{(s)}(L^2)} ds, \tag{2}$$

- En utilisant le fait que les normes de Strichartz sont globales en temps et l'inégalité de Sobolev, on obtient

$$\|\chi_2 u^5\|_{L^1(I,L^2)} \leq C \|\chi_2^{1/6} u\|^{5/2}_{L^\infty(I,L^6)} \leq C\varepsilon^{3/2} \|Ku\|_{L^\infty(I,E)}. \tag{3}$$

- En appliquant l'estimation (3) à (2), translatant t par T et notant

$$f(t) := \|Ku\|_{L^\infty_{(t+T)}(E)},\ g(t) := \|KU_L(t-T)\|_{L^\infty_{(t+T)}(E)},$$

on obtient l'inégalité intégrale suivante :

$$f(t) \leq g(t) + C\varepsilon^{3/2}\int_0^t e^{-\beta(t-s)}f(s)ds \tag{4}$$

- Lemme de Gronwall$\Rightarrow$ $f(t) \leq Ce^{-\beta t/2}$, pour $t \geq 0$, et $c\varepsilon^{3/2} < \beta/2$

- En appliquant l'estimation (3) à (2), translatant t par T et notant

$$f(t) := \|Ku\|_{L^\infty_{(t+T)}(E)},\ g(t) := \|KU_L(t-T)\|_{L^\infty_{(t+T)}(E)},$$

on obtient l'inégalité intégrale suivante :

$$f(t) \leq g(t) + C\varepsilon^{3/2} \int_0^t e^{-\beta(t-s)} f(s) ds \qquad (4)$$

- Lemme de Gronwall$\Rightarrow$ $f(t) \leq Ce^{-\beta t/2}$, pour $t \geq 0$, et $c\varepsilon^{3/2} < \beta/2$

Pourquoi Klein Gordon et pas les ondes

On considère $u(t,x)$ la solution dans l'espace de Shatah-Struwe du système :

$$\begin{cases} \Box u + \chi u^5 = 0 \text{ sur } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \\ u(0,x) = u^0(x) \in H^1(\mathbb{R}^3) \text{ et } \partial_t u(0,x) = 0, \end{cases}$$

et on définit $u_n(t,x) = \frac{1}{\sqrt{n}} u(\frac{t}{n}, \frac{x}{n})$. u_n est solution de :

$$\begin{cases} \Box u_n + \chi u_n^5 = 0 \text{ sur } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \\ \|u_n(0,x)\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} = \|u_0(x)\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \text{ et } \partial_t u_n(0,x) = 0. \end{cases}$$

L'énergie de u_n est indépendante de n.

Et on a pour $T > 0$:

$$\begin{array}{rcl} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_t u_n(t,x)|^2 dxdt & = & \frac{1}{n^3} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_t u(t/n, x/n)|^2 dxdt \\ & = & n \int_0^{\frac{T}{n}} \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_s u(s,x)|^2 dxds \\ & \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} & \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_s u(0,x)|^2 dx. \end{array}$$

On considère maintenant v_n solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Box v_n + \partial_t v_n + \chi v_n^5 = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \\ v_n(0,x) = u_n(0,x) \text{ et } \partial_t v_n(0,x) = 0, \end{array} \right.$$

$r_n := u_n - v_n$ est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Box r_n & = & -(u_n^5 - v_n^5) - \partial_t r_n + \partial_t u_n \text{ sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \\ & = & -r_n^5 - 5u_n^4 r_n + 10 u_n^3 r_n^2 - 10 u_n^2 r_n^3 + 5 u_n r_n^4 - \partial_t r_n + \partial_t u_n \\ r_n(0,x) & = & \partial_t r_n(0,x) = 0, \end{array} \right.$$

On pose

$$
\begin{aligned}
f_n(T) &= \sup_{0\leq t\leq T} E(r_n)(t) + \|r_n\|^2_{L^5([0,T],L^{10}(\mathbb{R}^3))} \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\partial_t r_n|^2 + |\nabla r_n|^2\right)dx + \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} r_n(t,x)^6 dx.
\end{aligned}
$$

On utilise l'inégalité d'énergie hyperbolique et les inégalités de

Strichartz et de Hölder on obtient :

$$
\begin{aligned}
f_n(T) &\leq C\left(\sum_{j=0}^{4}\|r_n\|^{5-j}_{L^5([0,T],L^{10}(\mathbb{R}^3))}\|u_n\|^{j}_{L^5([0,T],L^{10}(\mathbb{R}^3))}\right)^2 \\
&+ C\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}|\partial_t u_n(t,x)|^2 dtdx + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}|\partial_t r_n(t,x)|^2 dtdx\right)
\end{aligned}
$$

D'autre part,

$$\|u_n\|_{L^5([0,T],L^{10}(\mathbb{R}^3))} = \left(\int_0^{\frac{T}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u(t,x)|^{10} dx\right)^{1/2} dt\right)^{1/5} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

on utilise le lemme de Bootstrap on en déduit que :

$$f_n(T) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et par suite

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_t v_n(t,x)|^2 dtdx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Merci pour votre attention !