Propagation du support de mesures semi-classiques et stabilisation du problème de Zareba

Luc Robbiano
Laboratoire de Mathématiques de Versailles, UVSQ, CNRS,
Université Paris-Saclay

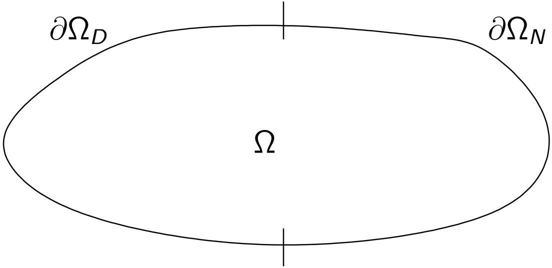
En collaboration avec
Pierre Cornilleau

PROBLÈME

Le but est d'étudier le problème suivant

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + a(x)\partial_t u = 0 \text{ dans } \Omega\times]0,\infty[\\ (u,\partial_t u)_{|t=0} = (u_0,u_1) \in H^1(\Omega)\oplus L^2(\Omega) \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega_D\times]0,\infty[\\ \partial_\nu u = 0 \text{ sur } \partial\Omega_N\times]0,\infty[, \end{cases}$$

où $a(x) \geq 0$, régulière et non identiquement nulle, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, ouvert



STABILISATION LOGARITHMIQUE

On définit l'énergie $E(u(t)) = \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 + |\partial_t u(t)|^2 dx$,

u la solution de l'équation des onde.

L'hypothèse $a(x) \geq 0$ implique que l'énergie décroit.

Le résultat précédent (avec P. Cornilleau) est le suivant si $a \not\equiv 0$

$$E(u(t)) \leq C/\ln^{2k}(3+t), \text{ où } C \text{ et } k \text{ dépendent des données.}$$

La question est, peut-on avoir, sous des hypothèses géométriques, une stabilisation exponentielle.

La réponse est oui, c'est-à-dire, il existe $c > 0$ telle que

$$E(u(t)) \leq E(u(0))e^{-ct}.$$

Reste les conditions géométriques... ce qu'on verra plus tard.

PROBLÈME STATIONNAIRE

Le problème d'évolution peut se mettre sous la forme $\partial_t U = AU$, où

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & -a(x) \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in H = H^1(\Omega) \oplus L^2(\Omega)$$

La stabilisation exponentielle est impliquée par les 3 propriétés suivantes (théorème de Huang)

1) $\exists M > 0$, $\|e^{tA}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq M$,
2) $A - i\mu I$, est inversible pour tout $\mu \in \mathbb{R}$,
3) $\exists M > 0$, $\|(A - i\mu I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq M$.

Le premier point résulte de la décroissance de l'énergie.

Le deuxième résulte d'un résultat de prolongement unique (ou du résultat précédent avec Pierre).

Il faut prouver le troisième point pour $|\mu|$ grand.

RÉDUCTION SEMI-CLASSIQUE

Soit $F = (f_0, f_1) \in H$, on cherche $U = (u_0, u_1) \in \mathcal{D}(A)$, tel que $AU - i\mu U = F$.

$$\begin{cases} u_1 - i\mu u_0 = f_0 \\ \Delta u_0 - a u_1 - i\mu u_1 = f_1. \end{cases} \tag{1}$$

On trouve l'équation suivante sur u_0

$$\Delta u_0 + \mu^2 u_0 - i\mu a u_0 = a f_0 + i\mu f_0 + f_1.$$

Si on prouve qu'il existe $C > 0$ telle que

$$|\mu| \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\|f_0\|_{H^1(\Omega)} + \|f_1\|_{L^2(\Omega)}),$$

pour tout $(u_0, u_1) \in H$, vérifiant (1), alors on estime $\|u_1\|_{L^2(\Omega)}$.

On introduit $h = 1/\mu$, l'équation devient

$$h^2 \Delta u_0 + u_0 - iha u_0 = a h^2 f_0 + ih f_0 + h^2 f_1,$$

L'estimation est équivalente à

$$\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|h\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch(\|f_0\|_{H^1(\Omega)} + \|f_1\|_{L^2(\Omega)}).$$

ARGUMENT PAR L'ABSURDE

On rappelle qu'on veut démontrer

$$\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|h\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch(\|f_0\|_{H^1(\Omega)} + \|f_1\|_{L^2(\Omega)}).$$

Si l'inégalité est fausse, il existe une suite notée encore u_h telle que

$$h^2\Delta u_h + u_h - ihau_h = ah^2 f_0^h + ihf_0^h + h^2 f_1^h$$
$$\|u_h\|_{L^2(\Omega)} + \|h\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)} = 1 \text{ (remarque } \|u_h\|_{L^2(\Omega)} \sim \|h\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)})$$
$$h(\|f_0^h\|_{H^1(\Omega)} + \|f_1^h\|_{L^2(\Omega)}) \to 0 \text{ quand } h \to 0.$$

Il existe $\beta > \alpha > 0$, $\theta \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, supportée sur $[\alpha, \beta]$, telle que

$$h^2\Delta v_h + v_h - ihav_h = hq_h,$$
$$\|v_h\|_{L^2(\Omega)} = 1 \text{ et } \|h\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)} \leq 2,$$
$$\|q_h\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \text{ quand } h \to 0,$$

où $v_h = \theta(-h^2\Delta)\tilde{u}_h$ et $\|\tilde{u}_h\|_{L^2(\Omega)} + \|h\nabla \tilde{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C$ avec $C > 0$.

MESURE DE DÉFAUT

On rappelle les propriétés de v_h.

$$\begin{aligned} &h^2\Delta v_h + v_h - ihav_h = hq_h, \\ &\|v_h\|_{L^2(\Omega)} = 1 \\ &\|q_h\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \text{ as } h \to 0, \end{aligned}$$

On peut définir une mesure de défaut semi-classique μ, vérifiant

$$(\mathrm{Op}_{sc}(b(x,\xi))\underline{v_h}|\underline{v_h}) \to \langle \mu, b\rangle, \text{ quand } h \to 0,$$

pour tout $b \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{2d})$. ($\underline{w}$ est le prolongement par 0 hors de Ω)

Par construction μ est supportée sur $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^d$.

RÉSULTAT ELLIPTIQUE

On a $p\mu = 0$, où $p = |\xi|^2 - 1$.

Résultat facile pour (x, ξ) si $x \in \Omega$.
Car $(h^2\Delta - 1)\,\mathrm{Op}_{sc}(b(x,\xi))v_h = \mathscr{O}(h)$, si $\mathrm{supp}\, b \subset \Omega \times \mathbb{R}^d$.

Au voisinage des points du bord le calcul est plus délicat.
Le résultat n'est vrai que pour de "bonnes" conditions au bord.
On a besoin d'une estimation des traces.
Estimations faciles provenant de $v_h \in H^1_{sc}$ et de la formule de trace (attention régularité limité de v_h)

$$\left|(v_h)_{|x_d=0}\right|_{H^{1/2}_{sc}} \leq C h^{-1/2} \qquad \left|(hD_{x_d} v_h)_{|x_d=0}\right|_{H^{-1/2}_{sc}} \leq C h^{-1/2}$$

Mais pour montrer le résultat on a besoin de

$$h^{1/2}\left(\left|(v_h)_{|x_d=0}\right|_{H^{1/2}_{sc}} + \left|(hD_{x_d} v_h)_{|x_d=0}\right|_{H^{-1/2}_{sc}}\right) \to 0$$

POINTS HYPERBOLIQUES

Coordonnées près du bord telles que $\Omega = \{x_d > 0\}$ et $p(x, \xi) = \xi_d^2 + R(x, \xi') - 1$.

Les points hyperboliques vérifient $R(x', 0, \xi') - 1 < 0$.
Points tels qu'il existe $\xi_d \neq 0$ vérifiant $p(x', 0, \xi', \xi_d) = 0$.

On fixe un point (x_0', ξ_0') tel que $R(x_0', 0, \xi_0') - 1 \leq -\varepsilon$, $\exists C_\varepsilon > 0$ telle que

$$
\begin{aligned}
|\operatorname{op}_{sc}(\chi_{|x_d=0})(v_h)_{|x_d=0}|_{H^1_{sc}} &\leq C_\varepsilon \\
|\operatorname{op}_{sc}(\chi_{|x_d=0})(hD_{x_d} v_h)_{|x_d=0}|_{L^2} &\leq C_\varepsilon,
\end{aligned}
$$

χ est une troncature dans un voisinage de $(x_0', 0, \xi_0')$.

IDÉES DE PREUVES

On factorise $\xi_d^2 + R(x,\xi') - 1 = (\xi_d - b(x,\xi'))(\xi_d + b(x,\xi')$, $b(x,\xi') = (1 - R(x,\xi'))^{1/2}$,

$$
\begin{aligned}
\big(hD_{x_d} - \mathrm{op}_{sc}(b)\big)\big(hD_{x_d} + \mathrm{op}_{sc}(b)\big) v_h &= hq_3^h \\
\big(hD_{x_d} + \mathrm{op}_{sc}(b)\big)\big(hD_{x_d} - \mathrm{op}_{sc}(b)\big) v_h &= hq_4^h,
\end{aligned}
$$

where $\|q_j^h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\varepsilon$ for $j = 3,4$.

On pose $z_k^h = \big(hD_{x_d} - (-1)^k \,\mathrm{op}_{sc}(b)\big) v_h$, on a pour $k = 1,2$,

$$
\big(hD_{x_d} + (-1)^k \,\mathrm{op}_{sc}(b)\big) z_k^h = h\tilde{q}_k^h.
$$

L'estimation d'énergie permet d'estimer $(z_k^h)_{|x_d=0}$, puis $(v_h)_{|x_d=0}$ et $(hD_{x_d} v_h)_{|x_d=0}$.

POINTS RASANTS

On fixe un point (x_0', ξ_0') tel que $|R(x_0', 0, \xi_0') - 1| \leq \varepsilon$, $\exists C_\varepsilon > 0$ telle que

$$|\operatorname{op}_{sc}(\chi_{|x_d=0})(v_h)_{|x_d=0}|_{H^1_{sc}} \leq C\varepsilon^{1/4}h^{-1/2} + C_\varepsilon h^{-3/8}$$
$$|\operatorname{op}_{sc}(\chi_{|x_d=0})(hD_{x_d}v_h)_{|x_d=0}|_{L^2} \leq C\varepsilon^{3/4}h^{-1/2} + C_\varepsilon h^{-3/8},$$

χ est une troncature dans un voisinage de $(x_0', 0, \xi_0')$, C ne dépend pas de ε.

L'idée : on a $h^2D_{x_d}^2 v_h + (R(x, hD') - 1)v_h = hq_h$ (où q_h est bornée).

En "gros" c'est comme si on avait $h^2D_{x_d}^2 v_h = \mathscr{O}(\varepsilon + h)$.

POINTS ELLIPTIQUES

Pour ces points on a besoin des conditions au bord.

On pose $\rho(x,\xi') = (R(x,\xi') - 1)^{1/2}$. On a

$$\left(hD_{x_d} + i\,\mathrm{op}_{sc}(\rho)\right)\left(hD_{x_d} - i\,\mathrm{op}_{sc}(\rho)\right)v_h = hq^h$$

On pose $z = \left(hD_{x_d} - i\,\mathrm{op}_{sc}(\rho)\right)v_h$.

On a, en prolongeant z par 0 pour $x_d < 0$

$$\left(hD_{x_d} + i\,\mathrm{op}_{sc}(\rho)\right)\underline{z} = hq^h - hiz_{|x_d=0} \otimes \delta_{x_d=0}.$$

On applique une paramétrixe et on a

$$\underline{z} = h\,\mathrm{Op}_{sc}\left((\xi_d + i\rho(x,\xi'))^{-1}\right)q_h,$$

car $\mathrm{Op}_{sc}\left((\xi_d + i\rho(x,\xi'))^{-1}\right)(z_{|x_d=0} \otimes \delta_{x_d=0}) = \mathscr{O}(h)$. D'où

$$\left|(hD_{x_d}v_h)_{|x_d=0} - i\,\mathrm{op}_{sc}(\rho)(v_h)_{|x_d=0}\right|_{H^{1/2}_{sc}} \leq C_\varepsilon h^{1/2}.$$

RÉSUMÉ

Rappel des propriétés. $(P = D_{x_d}^2 + R(x, D'))$

$$
\begin{aligned}
& h^2 P v_h - v_h + i h a v_h = h q_h, \\
& \|v_h\|_{L^2(\Omega)} = 1 \text{ and } \|h \nabla v_h\|_{L^2(\Omega)} \leq 2, \\
& \|q_h\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \text{ as } h \to 0, \\
& h^{1/2} \left| (v_h)_{|x_d=0} \right|_{H_{sc}^{1/2}} \to 0 \text{ as } h \to 0, \\
& h^{1/2} \left| (h D_{x_d} v_h)_{|x_d=0} \right|_{H_{sc}^{-1/2}} \to 0 \text{ as } h \to 0, \\
& p\mu = 0 \\
& a\mu = 0.
\end{aligned}
$$

Comment démontrer la propagation?

PROPAGATION À L'INTÉRIEUR

On calcule de deux façons

$$A = ih^{-1}\big(b(x,hD)\big(-h^2\Delta - 1 + iha\big)v_h|v_h\big)_{L^2} \\ - ih^{-1}\big(b(x,hD)v_h|\big(-h^2\Delta - 1 + iha\big)v_h\big)_{L^2}$$

On a

$$\begin{aligned} A &= ih^{-1}\big(b(x,hD)hq_h|v_h\big)_{L^2} - ih^{-1}\big(b(x,hD)v_h|hq_h\big)_{L^2} \\ &\to 0 \text{ quand } h \to 0. \\ &= ih^{-1}\big(b(x,hD)\big(-h^2\Delta - 1 + iha\big)v_h|v_h\big)_{L^2} \\ &\quad - ih^{-1}\big(\big(-h^2\Delta - 1 - iha\big)b(x,hD)v_h|v_h\big)_{L^2} \\ &= ih^{-1}\big([b(x,hD), -h^2\Delta - 1]v_h|v_h\big)_{L^2} \\ &\quad + ih^{-1}\big(b(x,hD)ihav_h|v_h\big)_{L^2} + ih^{-1}\big(ihab(x,hD)v_h|v_h\big)_{L^2} \\ &\to \langle \mu, \{b,p\}\rangle \text{ quand } h \to 0. \end{aligned}$$

D'où $H_p\mu = 0$.

PROPAGATION AU BORD I

On reprend le même calcul mais

- On va avoir des termes de bord.
- On ne sait pas faire le calcul avec $b(x, \xi', \xi_d)$.
- On remplace $b(x, \xi', \xi_d)$ par $b(x, \xi')$ et $b(x, \xi')\xi_d$.
- La mesure μ n'est pas définie pour $b \notin \mathscr{C}_0^\infty$.

Pour le dernier point, on a

$$\begin{aligned}
&\big(\operatorname{op}_{sc}(b)v_h|v_h\big)_{L^2(x_d>0)} \to \langle \mu, b\rangle \text{ quand } h \to 0\\
&\big(\operatorname{op}_{sc}(b)hD_{x_d}v_h|v_h\big)_{L^2(x_d>0)} \to \langle \mu, b\xi_d\rangle \text{ quand } h \to 0\\
&\big(\operatorname{op}_{sc}(b)h^2D_{x_d}^2v_h|v_h\big)_{L^2(x_d>0)} \to \langle \mu, b\xi_d^2\rangle \text{ quand } h \to 0,
\end{aligned}$$

où $b = b(x, \xi')$ vérifie certaines hypothèses.
Preuve reliée à la propriété : μ supportée sur $|\xi| \leq C$.

PROPAGATION AU BORD II

En calcul ant l'analogue du "A" ci-dessus on a les formules

$$\begin{aligned}\langle H_p\mu, b\rangle &= \langle \mu, \{b, p\}\rangle \\ &= \lim_{h\to 0} 2\,\mathrm{Re}\,\big(b(x', 0, hD')(v_h)_{|x_d=0} | (hD_{x_d} v_h)_{|x_d=0}\big)_0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\langle -H_p\mu, b\xi_d\rangle = \langle \mu, \{p, \xi_d b\}\rangle \\ &= \lim_{h\to 0} \mathrm{Re}\,\Big(\big(b(x', 0, hD')\big(R(x', 0, hD') - 1\big)(v_h)_{|x_d=0} | (v_h)_{|x_d=0}\big)_0 \\ &\qquad - \big(b(x', 0, hD')(hD_{x_d} v_h)_{|x_d=0} | (hD_{x_d} v_h)_{|x_d=0}\big)_0\Big).\end{aligned}$$

À partir de ces deux formules, on va démontrer les propriétés de μ près du bord.

DÉCOMPOSITION DE LA MESURE

$$\boxed{\mu = 1_{x_d>0}\mu + \mu^\partial \otimes \delta_{x_d=0} \otimes \delta_{\xi_d=0},}$$

où μ^∂ est supportée sur $R(x', 0, \xi') - 1 = 0$.

La preuve repose sur les ingrédients suivants

$$H_p(\xi_d b) = 2\xi_d^2(\partial_{x_d} b) - (\partial_{x_d} R)\partial_{\xi_d} b + \xi_d H_R' b,$$

$$\text{où } H_R' = \sum_{j=1}^{d-1} \left((\partial_{\xi_j} R)\partial_{x_j} - (\partial_{x_j} R)\partial_{\xi_j}\right)$$

$$b^\varepsilon = \varepsilon\chi(x_d/\varepsilon)\ell(x, \xi'),\ \text{où } \chi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}),$$

$$\chi(0) = 0,\ \chi'(0) = 1,\ \ell \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d-1})$$

Les termes de bord sont nuls car $\chi(0) = 0$.

Seul le terme $2\xi_d^2\chi'(x_d/\varepsilon)\ell(x, \xi')$, va compter à la limite $\varepsilon \to 0$.

On a $\langle \mu, 2\xi_d^2\ell 1_{x_d=0}\rangle = 0$, donc $\mu 1_{x_d=0}$ est supportée sur $\{\xi_d = 0\}$ on pose $1_{\xi_d=0}1_{x_d=0}\mu = \mu^\partial$.

PROPRIÉTÉS DE $1_{x_d>0}\mu$

On a $\boxed{H_p(\mu 1_{x_d>0}) = \delta_{x_d=0} \otimes \mu_0.}$

μ_0 est une distribution d'ordre 1 sur $x_d = 0$.

Sur $\{H_p x_d > 0\}$, $\mu_0 \geq 0$.
Sur $\{H_p x_d < 0\}$, $\mu_0 \leq 0$.

On a $H_p(\mu 1_{x_d>0}) = \sum_{j=0}^{n} \delta_{x_d=0}^{(j)} \otimes \mu_k$
car $H_p(\mu 1_{x_d>0})$ est supportée sur $x_d = 0$.

On teste sur $\varepsilon^n \chi(x_d/\varepsilon) b(x, \xi')$, et en passant à la limite seul le terme $\mu_0 \neq 0$.

Pour le signe de μ_0, on redresse le champs H_p, l'équation devient

$\partial_s(\mu 1_{s>0}) = \delta_{s=0} \otimes \mu_0$ si $H_p x_d > 0$.
$\partial_s(\mu 1_{s<0}) = \delta_{s=0} \otimes \mu_0$ si $H_p x_d < 0$.

En intégrant on a

$\mu 1_{s>0} = (1_{s>0} ds) \otimes \mu_0$ si $H_p x_d > 0$.
$\mu 1_{s<0} = -(1_{s<0} ds) \otimes \mu_0$ si $H_p x_d < 0$.

MESURE ET POINTS HYPERBOLIQUES

Localement au voisinage d'un point hyperbolique : $R(x', 0, \xi') - 1 < 0$, on a

$$\boxed{\mu_0 = \mu^+ \otimes \delta_{\xi_d = \sqrt{1 - R(x',0,\xi')}} - \mu^- \otimes \delta_{\xi_d = -\sqrt{1 - R(x',0,\xi')}}}$$

où $\mu^\pm \geq 0$.

Si $(v_h)_h$ vérifie les conditions au bord de Dirichlet ou de Neumann alors $\mu^+ = \mu^-$.

On a $H_p x_d = 2\xi_d$, et $\xi_d = \pm\sqrt{1 - R(x', 0, \xi')}$.
Comme, soit $(v_h)_{|x_d=0} = 0$, soit $(hD_{x_d} v_h)_{|x_d=0}$, on a

$$\langle H_p \mu, b \rangle = \lim_{h \to 0} 2 \operatorname{Re} \left(b(x', 0, hD')(v_h)_{|x_d=0} | (hD_{x_d} v_h)_{|x_d=0} \right)_0 = 0,$$

$H_p \mu = H_p(\mu 1_{x_d > 0}) = \delta_{x_d=0} \otimes \mu_0$, cela donne $\mu^+ = \mu^-$.

MESURE ET POINTS RASANTS

La mesure dépend du type de points et des conditions au bord.

Points diffractifs
$\mathcal{G}_d = \{(x', \xi'),\ R(x', 0, \xi') = 1 \text{ and } \partial_{x_d} R(x', 0, \xi') < 0\}$.

Cas Dirichlet, on a $\boxed{1_{\mathcal{G}_d \cap (\partial\Omega_D \times \mathbb{R}^{d-1})} \mu^\partial = 0}$.

$b(x, \xi') = \chi((1 - R(x, \xi'))/\varepsilon) \ell(x, \xi') \chi(x_d/\varepsilon)$,
$\varepsilon > 0$, ℓ supporté sur $\partial\Omega_D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$. On démontre que
$H_p(b\xi_d) \to -(\partial_{x_d} R(x', 0, \xi')) 1_{R(x',0,\xi')=1} 1_{x_d=0} \ell(x', 0, \xi')$ as $\varepsilon \to 0$.
On a un terme positif = un terme négatif

$$\langle \mu, H_p(2\xi_d b) \rangle = -\lim_{h \to 0} \operatorname{Re} \big(b(x', 0, hD') (hD_{x_d} v_h)_{|x_d=0} | (hD_{x_d} v_h)_{|x_d=0} \big)_0$$

REMARQUE : Pour les conditions de Neumann ou de Zaremba, on ne sait pas si les points diffractifs ne chargent pas μ^∂.

PROPAGATION DE μ^∂.

On suppose que v_h vérifie soit la condition au bord de Dirichlet, soit celle de Neumann. Alors

$\langle H'_R \mu^\partial + \mu_0, \ell \rangle = 0$ où $\ell = \ell(x', \xi')$.

De plus si μ_0 est supportée sur $\xi_d = 0$. C'est-à-dire

$\boxed{\mu_0 = \tilde{\mu}_0 \otimes \delta_{\xi_d=0} + \tilde{\mu}_1 \otimes \delta'_{\xi_d=0}}$ (μ_0 est d'ordre 1) alors

$\boxed{H'_R \mu^\partial + \tilde{\mu}_0 = 0}$.

$\boxed{H_p \mu = -\partial_{x_d} R(x', 0, \xi') \mu^\partial \otimes \delta_{x_d=0} \otimes \delta_{\xi_d=0}}$.

L'idée de preuve: On a $H_p \mu = \mu_0 + H_p(\mu^\partial \otimes \delta_{x_d=0} \otimes \delta_{\xi_d=0})$,

H_p a une forme particulière,

on teste cette expression sur $\ell(x', \xi') \chi(x_d/\varepsilon) \chi(\xi_d)$.

De plus $\langle \mu_0, \ell \rangle = \langle \tilde{\mu}_0, \ell \rangle$

FLOTS SUR $T^*\overline{\Omega}$