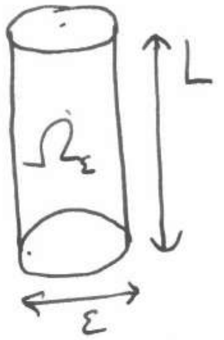
Introduction à l'approximation 3d-1d.



$$\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\bar{u}_\varepsilon \longrightarrow u}$$ u défini sur $(0,L)$ solution de quoi ?

$\Omega_\varepsilon = \varepsilon\omega \times (0,L)$.

Exemple simple :

Équation de la chaleur stationnaire :

$$(\bar{P}_\varepsilon) \begin{cases} -\operatorname{div} A\left(\frac{x'}{\varepsilon}, x_3\right) \nabla \bar{u}_\varepsilon = f\left(\frac{x'}{\varepsilon}, x_3\right) \text{ ds } \Omega_\varepsilon \\ \bar{u}_\varepsilon(x',0) = \bar{u}_\varepsilon(x',L) = 0 \,, \quad x' \in \omega . \\ A\left(\frac{x'}{\varepsilon}, x_3\right) \nabla \bar{u}_\varepsilon . \vec{n} = 0 . \quad \text{sur } \Gamma_N^\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_D^\varepsilon . \\ \Gamma_D^\varepsilon := \{(x',0) \cup (x',L)\}_{x' \in \omega} . \end{cases}$$

Hypothèses : A matrice de conductivité,

1) coercive $A(x)\xi . \xi \geq \alpha |\xi|^2$ p.p. $x \in \Omega = \omega \times (0,L)$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^3$ $(\mathbb{R}^N)$.
2) $A(x) \in (L^\infty(\Omega))^{3\times 3}$.
3) Terme source $f \in L^2(\Omega)$.

D'autres conditions aux limites possibles.

Par exemple : Mélées, Neumann - périodiques.

$$(\bar{P}_\varepsilon^1) \begin{cases} -\operatorname{div} A\left(\frac{x'}{\varepsilon}, x_3\right) \nabla \bar{u}_\varepsilon + \bar{u}_\varepsilon = f\left(\frac{x'}{\varepsilon}, x_3\right) \text{ ds } \Omega_\varepsilon \\ \bar{u}_\varepsilon(x',0) = \bar{u}_\varepsilon(x',L) \,, \quad x' \in \omega . \\ A\nabla u . \vec{n}\big|_{\Gamma_D^L} = A\nabla u . \vec{n}\big|_{\Gamma_D^0} \,, \quad \Gamma_D^L := \{(x',L), x' \in \omega\} \\ A\nabla u . \vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_N^\varepsilon . \quad \Gamma_D^0 = \{(x',0), x' \in \omega\}. \end{cases}$$

Scaling (Remise à l'échelle).

(S). $\bar{u}_\varepsilon(x', x_3) = \bar{u}_\varepsilon(\varepsilon y', x_3) = u_\varepsilon(y', x_3)$.

Alors $x' = \varepsilon y' \in \Omega_\varepsilon = \varepsilon\omega \times (0, L) \iff y' \in \omega$.

Donc $\Omega_\varepsilon \longleftrightarrow \Omega = \omega \times (0, L) =$ Ouvert fixe.

Prix à payer : $\nabla \bar{u}_\varepsilon(x', x_3) = \begin{pmatrix} \nabla' \bar{u}_\varepsilon(x', x_3) \\ \frac{\partial \bar{u}_\varepsilon}{\partial x_3}(x', x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} \nabla' u_\varepsilon(y', x_3) \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3}(y', x_3) \end{pmatrix}$

$= \nabla^\varepsilon u_\varepsilon(y', x_3)$.

Formulation variationnelle sur l'ouvert fixe.

$$(P_\varepsilon) \int_\Omega A(y', x_3) \nabla^\varepsilon u_\varepsilon(y', x_3) \nabla^\varepsilon \varphi(y', x_3)\, dy' dx_3 = \int_\Omega f(y', x_3)\varphi(y', x_3)\, dy' dx_3,$$

$$\forall \varphi \in H^1_D(\Omega) := \{ u \in H^1(\Omega),\ u(y', 0) = u(y', L) = 0 \}.$$

et pour les conditions mêlées :

$$(P_\varepsilon') \int_\Omega A \nabla^\varepsilon u_\varepsilon \nabla^\varepsilon \varphi + u_\varepsilon \varphi\, dx = \int_\Omega f\varphi\, dx,$$

$$\forall \varphi \in V = \{ u \in H^1(\Omega),\ u(x', 0) = u(x', L) \}.$$

$\boxed{\text{Étude de } P_\varepsilon}$

1) Existence de u_ε pour ε fixé.

Appliquer Lax-Milgram dans $H^1_D(\Omega)$.

2) Estimations a priori

$\varphi = u_\varepsilon$ dans $(\mathcal{P}_\varepsilon) \Rightarrow \|\nabla^\varepsilon u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C \ \forall \varepsilon$

(Utiliser Poincaré) et donc :

$$\left\|\frac{1}{\varepsilon}\nabla' u_\varepsilon\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\partial_3 u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C \ \forall\varepsilon .$$

D'où : $\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C \Rightarrow$

$$u_\varepsilon \longrightarrow u \text{ ds } H^1_D(\Omega) \text{ faible}$$

$$\left\| w_\varepsilon := \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} - \int_\omega \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon}\,dx' \right\|_{L^2(0,L;\,H^1_m(\omega))} = \left\|\frac{1}{\varepsilon}\nabla' u_\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C .$$

et donc $\quad w_\varepsilon \longrightarrow w$ ds $L^2(0,L;\,H^1_m(\omega))$ faible.

$\frac{1}{\varepsilon}\nabla u_\varepsilon = \frac{1}{\cancel{\varepsilon}}\nabla' w_\varepsilon \longrightarrow \nabla' w \quad L^2(\Omega)$ faible.

et $\|\nabla' u_\varepsilon\|_{L^2} \leq C\varepsilon \longrightarrow 0 \Rightarrow \nabla' u = 0$ ds Ω

$$\Rightarrow \quad u(\cancel{y'}, x_3) := u(x_3) \in H^1_0(0,L).$$

<u>Passage à la limite dans $\mathcal{P}_\varepsilon$</u>.

<u>Test du type</u> : $\varphi = \bar{u}(x_3) + \varepsilon\,\bar{w}(\cancel{y'}, x_3)$.

avec $(\bar{u}, \bar{w}) \in H^1_0(0,L) \times \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\int_\Omega \left(A_{\alpha\beta}\,\frac{1}{\varepsilon}\partial_\beta u_\varepsilon + A_{\alpha 3}\,\partial_3 u_\varepsilon\right)\frac{1}{\varepsilon}\,\partial_\alpha(\bar{u} + \varepsilon\bar{w}) + \left(A_{3\beta}\,\frac{1}{\varepsilon}\partial_\beta u_\varepsilon + A_{33}\,\partial_3 u_\varepsilon\right) \times$$

$$\times\left(\frac{d\bar{u}}{dx_3}(x_3) + \varepsilon\,\partial_3\bar{w}\right)dy'dx_3 = \int_\Omega f(y',x_3)\,\big(\bar{u}(x_3) + \varepsilon\,\bar{w}(y',x_3)\big)\,dy'dx_3$$

$\varepsilon \longrightarrow 0 \Rightarrow$

$$\int_\Omega \left[\left(A_{\alpha\beta}\,\partial_\beta w + A_{\alpha 3}\,\frac{du}{dx_3}(x_3)\right)\partial_\alpha\bar{w} + \left(A_{3\beta}\,\partial_\beta w + A_{33}\,\frac{du}{dx_3}(x_3)\right)\frac{d\bar{u}}{dx_3}\right]dy'dx_3 =$$

$$= \int_\Omega f(y',x_3)\,\bar{u}(x_3)\,dy'dx_3 .$$

Soit
$$\int_\Omega A \begin{pmatrix} \nabla' w(y', x_3) \\ \frac{du}{dx_3}(x_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla' \bar{w} \\ \frac{d\bar{u}}{dx_3} \end{pmatrix} dy' dx_3 = \int_\Omega f \bar{u}\, dy' dx_3. \qquad (P_0)$$

d'abord $\forall (\bar{u}, \bar{w}) \in H_0^1(0,L) \times \mathcal{D}(\Omega)$ puis $\forall (\bar{u}, \bar{w}) \in H_0^1(0,L) \times L^2(0,L; H_m^1(\omega))$ par densité.

Rques

1) (P_0) bien posé dans l'espace $H = H_0^1(0,L) \times L^2(H_m^1(\omega))$

2) w variable d'anisotropie ;

$w = 0$ si $A_{\alpha 3} = 0 \quad \forall \alpha = 1, 2$.

3) Convergences fortes :

$$\alpha \int_\Omega \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} \nabla' u_\varepsilon - \nabla' w \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3} - \frac{du}{dx_3} \end{pmatrix} \right|^2 dy' dx_3 \leq \int_\Omega A \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} \nabla' u_\varepsilon - \nabla' w \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3} - \frac{du}{dx_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} \nabla' u_\varepsilon - \nabla' w \\ \partial_3 u_\varepsilon - \frac{du}{dx_3} \end{pmatrix}$$

$$= \int_\Omega A \nabla^\varepsilon u_\varepsilon \nabla^\varepsilon u_\varepsilon - A \nabla^\varepsilon u_\varepsilon \begin{pmatrix} \nabla' w \\ \frac{du}{dx_3} \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} \nabla' w \\ \frac{du}{dx_3} \end{pmatrix} \nabla^\varepsilon u_\varepsilon + A \begin{pmatrix} \nabla' w \\ \frac{du}{dx_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla' w \\ \frac{du}{dx_3} \end{pmatrix}$$

$$\to \int_\Omega f u - 2A \begin{pmatrix} \nabla' w \\ \frac{du}{dx_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla' w \\ \frac{du}{dx_3} \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} \nabla' w \\ \frac{du}{dx_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla' w \\ \frac{du}{dx_3} \end{pmatrix} dy' dx_3$$

$$= \int_\Omega 2A \begin{pmatrix} \nabla' w \\ \frac{du}{dx_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla' w \\ \frac{du}{dx_3} \end{pmatrix} - 2A \begin{pmatrix} \nabla' w \\ \frac{du}{dx_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla' w \\ \frac{du}{dx_3} \end{pmatrix} dy' dx_3 = 0.$$

Conclusion : $\frac{1}{\varepsilon} \nabla' u_\varepsilon \to \nabla' w \quad L^2(\Omega)$ faible

et ~~\\\\\\~~ i.e. $w_\varepsilon \to w$, $L^2(0,L; H_m^1(\omega))$ fort.

$u_\varepsilon \to u$ dans $H_D^1(\Omega)$ fort.

puisque $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3} \to \frac{du}{dx_3}(x_3)$, $L^2(\Omega)$ fort.

<u>Donc</u> $\| \nabla^{\varepsilon}(u_\varepsilon) - \nabla^{\varepsilon}(u(x_3) + \varepsilon w) \|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0$.

$\| \nabla^{\varepsilon} w \|_{L^2(\Omega)}$ a un sens quand on <u>suppose</u> $\partial_3 w \in L^2(\Omega)$.

<u>Définition</u> : On dit que $u(x_3) + \varepsilon w(x_3)$ est un collecteur pour u_ε.

4) <u>Retour à la variable d'anisotropie w</u>

<u>localisation</u>

Dans (P_0), $\bar{u} = 0 \Rightarrow \int_\Omega A \begin{pmatrix} \nabla' w \\ \frac{du}{dx_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla' \bar{w} \\ 0 \end{pmatrix} dy' dx_3 = 0$

$\forall \bar{w} \in L^2(H^1_m(\omega))$

$\Rightarrow \int_\Omega A \begin{pmatrix} \nabla' w \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla' \bar{w} \\ 0 \end{pmatrix} dy' dx_3 = -\int_\Omega A \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{du}{dx_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla' \bar{w} \\ 0 \end{pmatrix} dy' dx_3$

$\forall \bar{w} \in L^2(0, L; H^1_m(\omega))$.

$\bar{w} = \varphi(x_3)\psi(y') \in L^2(0, L) \times H^1_m(\omega) \Rightarrow$

$\int_0^L \int_\omega A \begin{pmatrix} \nabla' w(y', x_3) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla' \psi(y') \\ 0 \end{pmatrix} dy' \varphi(x_3) dx_3 = -\int_0^L \int_\omega A \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{du}{dx_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \nabla' \psi(y') \\ 0 \end{pmatrix} dy' \varphi(x_3) dx_3 \quad \forall \varphi \in L^2(0, L) \Rightarrow$

(EL) $\int_\omega A(y', x_3) \begin{pmatrix} \nabla w(y', x_3) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla' \psi(y') \\ 0 \end{pmatrix} dy' = -\int_\omega A \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{du}{dx_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla' \psi \\ 0 \end{pmatrix} dy'$

$\forall \psi \in H^1_m(\omega)$, p.p. $x_3 \in (0, L)$.

D'autre part, pour $x_3 \in (0,L)$ donné,

l'équation
$$\int_\omega A(y',x_3)\begin{pmatrix}\nabla'\hat{w}(y',x_3)\\0.\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nabla'\psi\\0\end{pmatrix}dy' =$$
(EE)
$$= -\int_\omega A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nabla'\psi(y')\\0.\end{pmatrix}dy' \quad \forall \psi \in H^1_m(\omega).$$

admet une solution unique $\hat{w}(\cdot, x_3) \in H^1_m(\omega)$.
(Lax-Milgram) tout comme l'équation (EL).
pour $x_3 \in (0,L)$ donné.
On constate que $\frac{du}{dx_3}\hat{w}(\cdot,x_3)$ est aussi solution de (EL).
D'où par unicité de la solution de (EL):

$$p.p.\ x_3 \in (0,L), \quad w(y',x_3) = \hat{w}(y',x_3)\cdot\frac{du}{dx_3}(x_3) \quad (*)$$

Remarque : En fait $\hat{w} \in L^\infty(0,L; H^1_m(\omega))$

i.e., $\sup_{x_3\in(0,L)} \|\nabla'\hat{w}(\cdot,x_3)\|_{L^2(\omega)} \leq C$.

Corollaire : Forme réduite du pb limite P_0 :
équation ~~uni~~ 1d sur le fil $(0,L)$.

Utilisant $(*)$: $w(y',x_3) := \hat{w}(y',x_3)\frac{du}{dx_3}(x_3)$ dans (P_0),
il vient : $(\bar{w} = 0.)$

$$\int_0^L\int_\omega A(y',x_3)\begin{pmatrix}\nabla'\hat{w}(y',x_3)\\1.\end{pmatrix}\frac{du}{dx_3}(x_3)\begin{pmatrix}0\\\frac{d\bar{u}}{dx_3}\end{pmatrix}dy'dx_3 = \int_0^L\int_\omega f\,dy'\,\bar{u}\,dx_3$$

Soit $\int_0^L a_0(x_3)\frac{du}{dx_3}(x_3)\frac{d\bar{u}}{dx_3}(x_3)\,dx_3 = \int_0^L \tilde{f}(x_3)\,\bar{u}(x_3)\,dx_3$
$u \in H^1_0(0,L)$, $\forall \bar{u} \in H^1_0(0,L)$.

où $\quad a_0(x_3) := \int_\omega \left(A_{3\beta}\, \partial_\beta \hat{w}(y', x_3) + A_{33}(y', x_3) . 1 \right) dy'$

p.p. $x_3 \in (0, L)$. , $\tilde{f}(x_3) = \int_\omega f(y', x_3)\, dy'$

On démontre (Exercice !) que.

$$\exists\, \alpha > 0 : \quad a_0(x_3) \geq \alpha > 0. \quad \text{p.p. } x_3 \in (0, L).$$

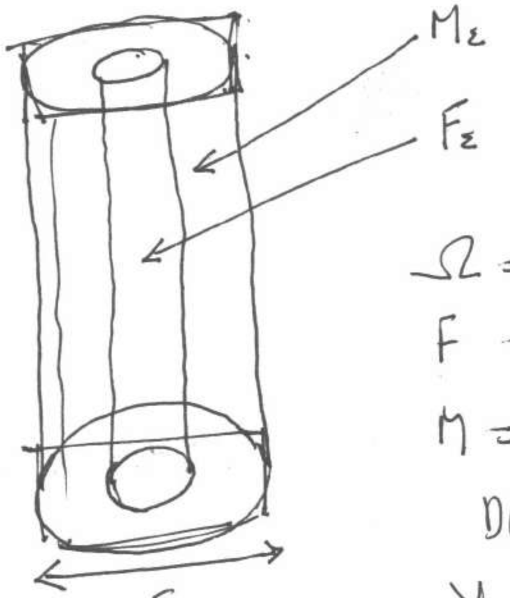
On a donc :

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx_3} a_0(x_3) \dfrac{du}{dx_3}(x_3) = \tilde{f}(x_3), \text{ ds } (0, L) \\ u(0) = u(L) = 0. \end{cases}$$

$$\longleftrightarrow.$$

3d-1d dans le cas fortement hétérogène

Géométrie



$\Omega_\varepsilon = F_\varepsilon \cup M_\varepsilon$

$F_\varepsilon = \varepsilon D(0,R) \times I$
$= \varepsilon D(0,R) \times (0,L)$

$M_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \setminus \overline{F_\varepsilon}$

$\Omega = Y \times (0,L)$
$F = D(0,R) \times (0,L)$
$M = \Omega \setminus \overline{F} = (Y \setminus D(0,R)) \times (0,L)$
$D(0,R) \subset Y \; ; R < 1/2$
$Y = \left(\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\right)^2.$

Équation dans Ω_ε :

$$\cancel{\mathcal{U}_\varepsilon} \quad -\operatorname{div}\left(\chi_{M_\varepsilon} + \varepsilon^2 \chi_{F_\varepsilon}\right) \nabla \bar{u}_\varepsilon = f\left(\frac{x'}{\varepsilon}, x_3\right) \text{ ds } \Omega_\varepsilon$$

$$\bar{u}_\varepsilon(x', 0) = \bar{u}_\varepsilon(x', L) = 0 \quad , x' \in \varepsilon Y$$

$$\left(\chi_{M_\varepsilon} + \varepsilon^2 \chi_{F_\varepsilon}\right) \nabla \bar{u}_\varepsilon . n = 0 \text{ sur } \Gamma_N^\varepsilon$$

Forte hétérogénéité : faible diffusion ε^2 ds F_ε, 1 ds M_ε.

Même scaling : $x' = \varepsilon y$, $u_\varepsilon(y, x_3) = \bar{u}_\varepsilon(\varepsilon y, x_3)$, $y \in Y$.

$$\Omega = Y \times (0,L).$$

Formulation variationnelle ds l'ouvert fixe $\Omega = Y \times (0,L)$

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} u_\varepsilon \in H_D^1(0,L), \int_\Omega \left(\chi_M + \varepsilon^2 \chi_F\right) \nabla^\varepsilon u_\varepsilon(y,x_3) \nabla^\varepsilon \varphi(y,x_3)\, dy\, dx_3 = \int_\Omega f(y,x_3) \varphi \, dy\, dx_3 \\ \forall \varphi \in H_D^1(0,L). \end{cases}$$

THM : $\forall \varepsilon > 0, \exists! \, u_\varepsilon \in H_D^1(0,L)$ solution de (P_ε).

Dém : Lax-Milgram.

ANALYSE ASYMPTOTIQUE

Estimations a priori — remplacer partout ω par Y!

$$J_\varepsilon := \int_\Omega (\chi_M + \varepsilon^2 \chi_F)\, \nabla^\varepsilon u_\varepsilon \nabla^\varepsilon u_\varepsilon \, dy\, dx_3$$

$$\text{P.W} \Rightarrow \left\| u_\varepsilon - \fint_{Y \setminus D} u_\varepsilon \, dx' \right\|_{L^2(Y)} \le C \, \| \nabla' u_\varepsilon \|_{L^2(Y)} \quad \forall x_3 \in (0,L). \ \forall \varepsilon > 0.$$

$$\Rightarrow \int_0^L \int_Y \Big(u_\varepsilon - \fint_{Y \setminus D} u_\varepsilon \, dy'\Big)^2 dy' \, dx_3 \le C \int_0^L \int_Y |\nabla' u_\varepsilon(y,x_3)|^2 \, dy\, dx_3$$

$$\le C J_\varepsilon .$$

ET: $$\int_0^L \int_Y \Big| \fint_{Y \setminus D} u_\varepsilon \, dy \Big|^2 dx_3 = \frac{|\omega|}{|Y - D|^2} \int_0^L \Big| \int_{Y \setminus D} u_\varepsilon \, dy \Big|^2 dx_3 \le$$

$$\le C \int_0^L \int_{Y \setminus D} \Big| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3} \Big|^2 dy \, dx_3 \le C J_\varepsilon .$$

Donc: $$\|u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} \le C \left\| u_\varepsilon - \fint_{Y \setminus D} u_\varepsilon \, dy \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| \fint_{Y - D} u_\varepsilon \, dy \right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\le C J_\varepsilon .$$

$\varphi = u_\varepsilon$ dans $(\mathcal{P}_\varepsilon) \Rightarrow$

$$J_\varepsilon \le \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \le C \sqrt{J_\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \boxed{J_\varepsilon \le C \quad \forall \varepsilon} .$$

$$\Rightarrow \quad \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \le C$$

Conclusion: $$\| \nabla^\varepsilon u_\varepsilon \chi_M \|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{\varepsilon^2} \| \nabla' u_\varepsilon \chi_M \|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3} \chi_M \right\|^2_{L^2(\Omega)} \le C$$

$$\| \varepsilon \nabla^\varepsilon u_\varepsilon \chi_F \|^2_{L^2(\Omega)} = \| \nabla' u_\varepsilon \chi_F \|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2 \left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3} \chi_F \right\|^2_{L^2(\Omega)} \le C$$

Extraction de suites :

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla' u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C \Longrightarrow \|u_\varepsilon\|_{L^2(I;H^1(\mathcal{Y}))} \leq C.$$

$$\Longrightarrow \quad u_\varepsilon \longrightarrow u_0(x), \; L^2(I; H^1(\mathcal{Y})) \text{ faible}$$

$$\left\|\frac{1}{\varepsilon}\nabla' u_\varepsilon \chi_M\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \Longrightarrow \nabla' u_\varepsilon \chi_M \longrightarrow 0 \quad L^2(\Omega) \text{ fort}$$

$$\Longrightarrow \quad \nabla' u_0 \chi_M = 0 \Longrightarrow u_0(y, x_3) = v(x_3) \text{ ds } M.$$

$$(*) \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3}\chi_M \longrightarrow \frac{\partial u_0}{\partial x_3}(x)\chi_M \in L^2(\Omega) \text{ faible.}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial u_0}{\partial x_3}(x)\chi_M = \frac{dv}{dx_3}(x_3)\chi_M \in L^2(\Omega) \Rightarrow v \in H^1(I).$$

$$u_\varepsilon(y,0) = u_\varepsilon(y,L) = 0 \text{ p.p. } y \in \mathcal{Y} \Longrightarrow v(0) = v(L) = 0$$

$$\Longrightarrow v \in H^1_0(I).$$

$$(*) \Longleftrightarrow \quad u_\varepsilon \chi_M(y) \longrightarrow u_0 \chi_M(y) \text{ dans } L^2(\mathcal{Y}; H^1_0(I)).$$

Soit : $u(y, x_3) = u_0(y, x_3) - v(x_3)$ dans Ω, alors $u = 0$ dans M et on a les cvges

~~Alors~~ : (1) $u_\varepsilon \longrightarrow u(y, x_3) + v(x_3)$ ds $L^2(I; H^1(\mathcal{Y}))$

$u = 0$ dans M.

(2) $\nabla' u_\varepsilon \chi_F \longrightarrow \nabla'_y u(y, x_3)\chi_F$, $L^2(\Omega)$ faible

(3) $\frac{1}{\varepsilon}\nabla' u_\varepsilon \chi_M \longrightarrow \nabla'_y w(y, x_3)\chi_M$ $L^2(\Omega)$ faible

(4) $\frac{1}{\varepsilon}\left(u_\varepsilon - \int_{\mathcal{Y}} \frac{u_\varepsilon}{|D|}\right) \longrightarrow w(y, x_3)$, $L^2(I; H^1_m(\mathcal{Y}|D))$.

(5) $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3}\chi_M \longrightarrow \frac{dv}{dx_3}(x_3)\chi_M$, $L^2(\Omega)$ faible

(6) $\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3}\chi_F \longrightarrow 0$ $L^2(\Omega)$ faible :

Passage à la limite, correcteur :

$$\varphi(y,x_3) = \bar{u}(y,x_3) + \bar{v}(x_3) + \varepsilon\,\bar{w}(y,x_3)$$

$\bar{v} \in H^1_0(I)$, $\bar{u} \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\bar{w} \in \mathcal{D}(\overline{Y \setminus D}) \times \mathcal{D}(I)$,

donc $(P_\varepsilon) \Longrightarrow$ $\quad \bar{u} = 0$ dans M

$$\int_\Omega (\chi_M + \varepsilon^2 \chi_F) \nabla^\varepsilon u_\varepsilon \nabla^\varepsilon \varphi \, dy\, dx_3 = \int_M \frac{1}{\varepsilon} \nabla' u_\varepsilon \nabla' \bar{w} + \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3}\left(\frac{d\bar{v}}{dx_3} + \varepsilon \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_3}\right)$$

$$+ \int_F \varepsilon^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \nabla' u_\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} \nabla' \bar{u} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla' u_\varepsilon \nabla' \bar{w} + \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3} \frac{d\bar{v}}{dx_3} + \varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_3} \right)$$

$$= \int_\Omega f(y,x_3) \left(\bar{u}(y,x_3) + \bar{v}(x_3) + \varepsilon\, \bar{w}(y,x_3) \right) dy\, dx_3$$

D'où $\varepsilon \to 0 \Longrightarrow$

$$\int_M \nabla' w \nabla' \bar{w} + \frac{dv}{dx_3}\frac{d\bar{v}}{dx_3} + \int_F \nabla' u \nabla' \bar{u} \, dy\, dx_3 = \int_\Omega f(y,x_3)(\bar{u} + \bar{v})\, dy\, dx_3$$

Par densité, on a donc la 1ère formulation du pb limite :

$$\int_\Omega \begin{pmatrix} \nabla' w \\ \frac{dv}{dx_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nabla' \bar{w} \\ \frac{d\bar{v}}{dx_3} \end{pmatrix} \chi_M + \int \nabla' u \nabla' \bar{u}\, \chi_F \, dy\, dx_3 = \int_\Omega f(\bar{u} + \bar{v})$$

$(u, v, w) \in L^2(I; H^1(Y)) \times H^1_0(I) \times L^2(I; H^1_m(Y \setminus \bar{D}))$.

$\quad u = 0$ dans M

$\forall (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in$ - - - - même espace.

Remarque : Dans le cas isotrope $w = 0$:

$\bar{u} = \bar{v} = 0$, $\bar{w} = w \Rightarrow \nabla' w = 0 \Rightarrow w = 0$ dans $L^2(I; H^1_m(Y \setminus \bar{D}))$

Cas d'une matrice complète (pleine).

$$(u, v, w) \in \{\varphi \in L^2(I; H^1(\Omega)),\ \varphi = \text{cte dans } M\} \times H_0^1(I) \times L^2(I; H_m^1(Y))$$

$$= L^2(I; H_0^1(D))$$

$$\int_\Omega \left[A(x) \begin{pmatrix} \nabla'_y w \\ \frac{dw}{dx_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla'_y \bar{w} \\ \frac{d\bar{w}}{dx_3} \end{pmatrix} \chi_M + A(x) \begin{pmatrix} \nabla'_y u \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla'_y \bar{u} \\ 0 \end{pmatrix} \chi_F \right] dy\,dx_3$$

$$= \int_\Omega f\,(\bar{u} + \bar{v}(x_3))\,dy\,dx_3 \quad \forall (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in \dots \text{ m̂ espace}$$

Remarque : w est bien une variable d'anisotropie caractérisant le milieu où il y a diffusion selon l'axe x_3, ici M :
si $A_{\alpha 3} = 0$, $\alpha = 1, 2$, alors $w = 0$.

Mise en évidence de l'effet non local

Le problème limite avec $\bar{v} = 0 \Rightarrow \int_F \nabla' u \nabla' \bar{u}\,dy\,dx_3 = \int_F f(y, x_3)\,\bar{u}\,dy\,dx_3$

on a : $\quad f(y, x_3) = f(y, x_3) - \fint_D f(y, x_3)\,dy + \fint_D f(y, x_3)\,dy.$

D'où :

$$\int_0^L \int_D \nabla' u \nabla \bar{u}\,dy\,dx_3 = \int_0^L \int_D \Big(f(y, x_3) - \fint_D f(y, x_3)\,dy\Big)\,\bar{u}\,dy\,dx_3 + \int_0^L \int_D \fint_D f(y,x_3)\,dy\,\bar{u}\,dy\,dx_3$$

garder D. $\quad D$.

de sorte que $u = u_1 + u_2$ où u_i, $i = 1, 2$ solutions de :

$$\int_0^L \int_D \nabla' u_1 \nabla \bar{u}\,dy\,dx_3 = \int_0^L \int_D \fint_D f(y, x_3)\,dy\ \bar{u}(y, x_3)\,dy\,dx_3 \quad \forall \bar{u} \in H$$

et $$\int_0^L \int_D \nabla' u_2 \nabla \bar{u}\,dy\,dx_3 = \int_0^L \int_D \Big(f - \fint_D f\,dy\Big)\,\bar{u}\,dy\,dx_3.$$

(Superposition des solutions).

<u>Localisation</u> : Pour x_3 donné ds $(0,L)$, $u_1(\cdot,x_3)$ est solution de
$$\int_D \nabla' u_1(\cdot,x_3)\,\nabla \bar{u}\,dy = \int_D \left(⨍_D f dy\right)\bar{u}(y)\,dy$$
$$\underbrace{\forall \bar{u} \in H^1(\cancel{Y}),\ \bar{u}=0 \text{ dans } \cancel{Y}\, \partial D}_{\forall \bar{u} \in H^1_0(D)}$$
et u_1 est donnée par :
$$u_1(y,x_3) := \hat{u}(y) ⨍_D f(y,x_3)\,dy \text{ où } \hat{u} \text{ est solution de}$$
$$\begin{cases} \int_D \nabla'\hat{u}(y)\,\nabla'\bar{u}\,dy = \int_D \bar{u}(y)\,dy, & \forall \bar{u} \in H^1_0(D). \\ \hat{u} \in H^1_0(D) \end{cases}$$

<u>Conclusion</u> : $u_\varepsilon \longrightarrow u(x,y)+v(x_3)$, $L^2(I; H^1(\cancel{Y}))$ faible

et $\bar{u}_\varepsilon(x',x_3)$ (définie sur $\Omega_\varepsilon = \varepsilon\cancel{Y} \times (0,L)$) vérifie :
$$\frac{1}{|\varepsilon \cancel{Y}|}\int_{\varepsilon \cancel{Y}} \bar{u}_\varepsilon(x',x_3)\,dx' \longrightarrow U(x_3) = ⨍_{\cancel{Y}} u(y,x_3)+v(x_3)\,dy,\ L^2(0,L) \text{ fort}$$
$$\text{et } U(x_3) = \frac{1}{|\cancel{Y}|}\int_{D} u(y,x_3)\,dy + v(x_3) = \frac{1}{|\cancel{Y}|}\int_D (u_1+u_2)\,dy + v(x_3)$$
$$= \frac{1}{|\cancel{Y}|}\int_D \hat{u}(y)\left(⨍_D f(y,x_3)\,dy\right)dy + \frac{1}{|\cancel{Y}|}\int_D u_2\,dy + v(x_3)$$
$$= m ⨍_D f(y,x_3)\,dy + \frac{1}{|\cancel{Y}|}\int_D u_2\,dy + v(x_3) \quad \text{où } m := \frac{1}{|\cancel{Y}|}\int_D \hat{u}(y)\,dy$$

<u>Remarques</u> : (1) $\int_D \hat{u}(y)\,dy = \int_D \nabla'\hat{u}\,\nabla'\hat{u}\,dy > 0$ car $\hat{u} \neq 0$.

(2) $u_2 = 0$ si $f(y,x_3) \equiv f(x_3)$

Donc la température limite moyenne $U(x_3)$ est donnée par la résolution de 2 équations :

D'abord v :

$$\int_M \frac{dv}{dx_3}\frac{d\bar v}{dx_3} = \int_0^L \int_{\mathcal{Y}} f(y,x_3)\,\bar v(x_3)\,dy\,dx_3 \quad \forall \bar v \in H_0^1(0,L)$$

Soit :

$$-\frac{d^2 v}{dx_3^2}(x_3) = \frac{1}{|\mathcal{Y}\setminus D|}\int_{\mathcal{Y}} f(y,x_3)\,dy \quad \text{ds } (0,L)$$

$$v \in H_0^1(0,L)$$

Puis calculer $m := \frac{1}{|\mathcal{Y}|}\int_D \hat u(y)\,dy$ c.à.d calculer $\hat u$ en résolvant :

$$\begin{cases} -\Delta'\hat u = 1 & \text{ds } D \\ \hat u \in H_0^1(D). \end{cases}$$

et on a

$$\boxed{U(x_3) - v(x_3) = m \int_D f(y,x_3)\,dy + \frac{1}{|\mathcal{Y}|}\int_D u_2\,dy.}$$

CONVERGENCE DE L'ÉNERGIE

Rappel : $J_\varepsilon := \int_\Omega (\chi_M + \varepsilon^2\chi_F)\,\nabla^\varepsilon u_\varepsilon \nabla^\varepsilon u_\varepsilon\,dy\,dx_3$.

Thm : $J_\varepsilon \longrightarrow J_0 := \int_\Omega \left(\left|\frac{dv}{dx_3}\right|^2\chi_M + |\nabla' u|^2\chi_F\right)dy\,dx_3$.

En conséquence, les cvges (1) – (6) sont des convergences fortes.

Démonstration

$$J_\varepsilon = \int_\Omega f u_\varepsilon\,dy\,dx_3 \longrightarrow \int_\Omega f(y,x_3)\,\big(u(y,x_3)+v(x_3)\big)\,dy\,dx_3$$

$$= \int_\Omega \left(\left|\frac{dv}{dx_3}\right|^2\chi_M + |\nabla' u|^2\chi_F\right)dy\,dx_3. \quad \text{D'où :}$$

$$I_\varepsilon := \int_\Omega \left(\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3} - \frac{dv}{dx_3}\right|^2\chi_M + \frac{1}{\varepsilon^2}|\nabla' u_\varepsilon|^2\chi_M + \varepsilon^2\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3}\right|^2\chi_F + |\nabla' u_\varepsilon - \nabla u|^2\chi_F\right)dy\,dx_3 =$$

$$= J_\varepsilon + J_0 + \int_\Omega -2\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3}\frac{dv}{dx_3}\chi_M - 2\nabla' u_\varepsilon \nabla' u\,\chi_F\,dy\,dx_3 \longrightarrow 2J_0 - 2J_0 = 0.$$

Ce qui donne immédiatement les cvges fortes (2) - (6).
Reste la cvge (1) :

LEMME :

$\exists\, C > 0 \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left[\|\nabla' u\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_3} \right\|_{L^2(M)} \right]$

$\forall u \in L^2(I; H^1(\omega)) \cap L^2(\omega\setminus\overline{D}; H^1_0(I))$.

Dém : Par l'absurde : $\exists\, (u_n) \in \ldots$ tq

$(*)\ \|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1 \ \forall n$ et $\|\nabla' u_n\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_3} \right\|_{L^2(M)} \xrightarrow[n]{} 0$.

Alors PW $\Rightarrow$ p.p. $x_3 \in (0, L)$, $\left\| u_n(\cdot, x_3) - \fint_{\omega\setminus\overline{D}} u_n\, dy \right\|_{L^2(\omega)} \leq C \|\nabla' u_n(\cdot, x_3)\|_{L^2(\omega)}$

D'où par intégration sur $(0, L)$:

$$\left\| u_n - \fint_{\omega\setminus\overline{D}} u_n\, dy \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\, \|\nabla' u_n\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall n.$$

Or pour $y \in \omega\setminus\overline{D}$, $\int_0^L |u_n(y, x_3)|^2\, dx_3 \leq C \int_0^L \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_3} \right|^2 (y, x_3)\, dx_3$.

D'où

$$\int_{\omega\setminus\overline{D}} \int_0^L |u_n(y, x_3)|^2\, dx_3\, dy = \int_0^L \int_{\omega\setminus\overline{D}} |u_n(y, x_3)|^2\, dy\, dx_3 \leq \int_0^L \int_{\omega\setminus\overline{D}} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_3} \right|^2 =$$

$$= \int_M \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_3} \right|^2 dy\, dx_3 \text{ et donc.}$$

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| u_n - \fint_{\omega\setminus\overline{D}} u_n\, dy \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \fint_{\omega\setminus\overline{D}} u_n\, dy \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla' u_n\|_{L^2(\Omega)} +$$

$$C \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_3} \right\|_{L^2(M)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$ Contradiction avec $(*)$.

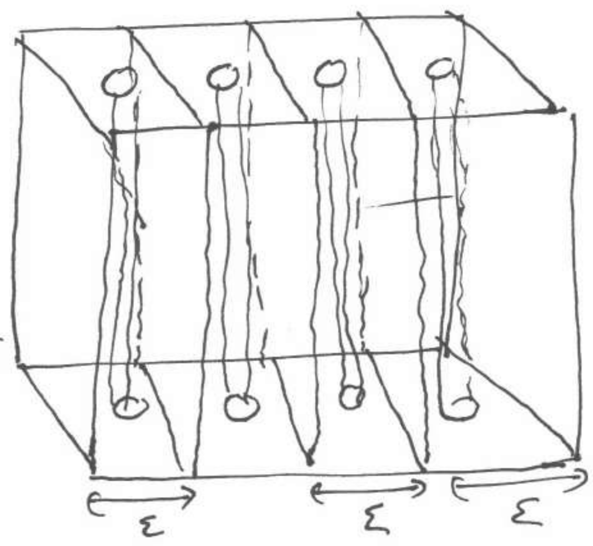
Lemme appliqué à $u_\varepsilon - (u(y, x_3) + v(x_3)) \Rightarrow$.

$$\|u_\varepsilon - (u(y,x_3) + v(x_3))\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left[\|\nabla' u_\varepsilon - \nabla' u\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3} - \frac{dv}{dx_3}\right\|_{L^2(M)}\right]$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

CQFD.

PARALLÈLE AVEC LE CAS DE L'HOMOGÉNÉISATION



Géométrie :

$\Omega = F_\varepsilon \cup M_\varepsilon$

$F_\varepsilon = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} F_\varepsilon^i = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} (\varepsilon D + \varepsilon i) \times I$

$M_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{F_\varepsilon}$

$= \Omega \setminus \bigcup_{i \in I_\varepsilon} (\varepsilon \overline{D} + \omega) \times I$

En gros, $\frac{|\Omega|}{\varepsilon^2}$ fibres réparties périodiquement dans Ω avec une période de taille ε, ~~$\Omega = (]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[)^2 \times (0, L)$~~. de mesure L.

ou bien $\Omega = \omega \times (0, L)$, $\omega \in \mathbb{R}^2$; $\omega = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} (\varepsilon Y + \varepsilon i) = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} Y_\varepsilon^i$.

où $Y = (]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[)^2$.

le Ω_ε de la section précédente est ici $\varepsilon Y \times (0, L)$.

En fait $I_\varepsilon := \{ i \in \mathbb{Z}^2 / \ \varepsilon Y + \varepsilon i = \varepsilon (]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^2) + \varepsilon i \subset \omega \}$.

si $\Omega = \omega \times (0, L)$.

On pose $Y_\varepsilon^i := \varepsilon Y + \varepsilon i$.

Dans la section précédente, $\omega = \omega_\varepsilon = \varepsilon Y$! et $\Omega_\varepsilon = \varepsilon Y \times (0, L)$.

En homogénéisation, une notion de cvge faible : la cvge à double échelle : $t_\varepsilon \rightharpoonup t(x,y) \in L^2(\Omega \times Y)$ si

$$\int_\Omega t_\varepsilon \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx \longrightarrow \int_\Omega \int_Y t(x,y)\, \varphi(x,y)\, dy\, dx$$

$$\forall\ \varphi \in L^2(\Omega; C_\#(Y)).$$

(Notion due à Gabriel Nguetseng, Grégoire Allaire).

<u>Compacité</u> : Toute suite bornée dans $L^2(\Omega)$ admet une sous-suite convergeant à double échelle.

<u>ANALOGIE DU RÉSULTAT AVEC LE 3D-1D.</u>

(1') $u_\varepsilon \rightharpoonup u(x,y) + v(x)$ avec :

$v(x) \in L^2(\omega; H_0^1(0,L))$; $u(x,y) \in L^2(\Omega; H^1_\#(Y))$, $u(\cancel{x}, \bullet) = 0$ dans ~~..~~ Y \ D. $\quad u(x,y) \in L^2(\Omega; H_0^1(D))$

(2') $\nabla' u_\varepsilon \chi_{F_\varepsilon} \rightharpoonup \nabla'_y u(x,y)\, \chi_D(y)$

(3') $\frac{1}{\varepsilon} \nabla' u_\varepsilon \chi_{M_\varepsilon} \rightharpoonup \nabla'_y w(x,y)\, \chi_{Y \setminus D}(y)$

(4') $w_\varepsilon := \sum_{i \in I_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \left(u_\varepsilon - \fint_{Y_\varepsilon^i \setminus D_\varepsilon^i} u_\varepsilon\, dx'\right) \chi_{Y_\varepsilon^i \setminus D_\varepsilon^i}(x') \rightharpoonup w(x,y) \in L^2(\Omega; H^1_m(Y \setminus D))$

(5') $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3} \chi_{M_\varepsilon} \rightharpoonup \frac{\partial v}{\partial x_3} \chi_{Y\setminus D}(y)$

(6') $\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3} \chi_{F_\varepsilon} \longrightarrow 0 \quad L^2(\Omega)$ (donc d. échelle).

où (u, v, w) est solution de (unique) :

$$(P_{hom}) \int_{\Omega \times Y} A(x,y) \begin{pmatrix} \nabla'_y w(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x_3}(x) \end{pmatrix} \chi_{Y\setminus D}(y) \begin{pmatrix} \nabla'_y \bar{w} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_3}(x) \end{pmatrix} + A(x,y) \cdot \begin{pmatrix} \nabla'_y u(x,y) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla'_y \bar{u} \\ 0 \end{pmatrix} \chi_D(y)$$

$$dy\, dx = \int_{\Omega \times Y} f(x,y) \left(\bar{u}(x,y) + \bar{v}(x) \right) dy\, dx \quad \forall (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in \ldots$$

L'EFFET NON LOCAL.

Lemme : ~~Supposons~~ $\exists\, \hat{w} \in L^\infty(\Omega; H^1_m(Y \setminus D))$ tq :

$$w(x,y) = \hat{w}(x,y)\,\frac{\partial v}{\partial x_3}(x) \quad \text{p.p. } (x,y) \in \Omega \times (Y \setminus D).$$

Corollaire : $(P_{hom}) \iff \begin{cases} -\operatorname{div}'_y A(x,y)\nabla'_y u = f, \quad \Omega \times D, \quad u(x,\cdot) \in H^1_\#(Y) \\ u = 0 \text{ sur } \partial D \\ \cancel{A(x,y)\nabla u \cdot n = 0 \text{ sur } \partial T} \\ -\dfrac{\partial}{\partial x_3} a_0(x) \dfrac{\partial v}{\partial x_3} = \displaystyle\fint_Y f\,dy, \quad \Omega \\ v \in L^2(\omega; H^1_0(0,L)). \end{cases}$$

avec $a_0(x) \geq \alpha > 0$ p.p. $x \in \Omega$.

Thm : Mise en évidence de l'effet non local

Supposons $f(x,y) = f(x)$, $(x,y) \in \Omega \times Y$. alors :

$u(x,y) = \hat{u}(x,y) f(x)$ où $\hat{u}$ unique solution de :

p.p. $x \in \Omega$, $\begin{cases} -\operatorname{div}'_y A(x,\cdot)\nabla_y \hat{u} = 1 \quad \text{dans } D. \\ \hat{u} = 0 \quad \text{sur } \partial D. \\ \cancel{\hat{u} \in H^1_\#(Y)}. \end{cases}$ $\left(\hat{u} \in (x,\cdot) \in H^1_0(D)\right)$

et on a : $u_\varepsilon \longrightarrow U(x) = \fint_Y u(x,y)\,dy + v(x) = \displaystyle\int_{Y_D} u(x,y)\,dy + v(x)$

donc $U(x) = f(x) \displaystyle\int_{D} \hat{u}(x,y)\,dy + v(x) = v(x) + m f(x)$.

donc $U(x) - v(x) = m f(x)$, $m := \displaystyle\int_D \hat{u}(x,y)\,dy > 0$.

et $\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_3} a_0(x) \dfrac{\partial v}{\partial x_3}(x) = f(x) \quad \text{ds } \Omega \\ v \in L^2(\omega; H^1_0(I)) . \end{cases}$