Cours III

Le problème de Stokes avec diverses conditions aux limites

On s'intéresse ici à l'étude du problème de Stokes, avec divers types de conditions aux limites :

$$(S)\begin{cases} \text{Trouver } (\vec{u}, \pi) \text{ vérifiant} & \\ -\Delta\vec{u} + \nabla\pi = \vec{f} & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

avec l'une des conditions aux limites suivantes sur Γ :

- $\vec{u} = \vec{0}$ (Dirichlet)
- $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$ et $\overrightarrow{\operatorname{curl}\, u} \times \vec{n} = \vec{0}$ (type Navier)
- $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$ et $(D\vec{u})\,\vec{n} + \alpha\,\vec{u}_\tau = \vec{0}$ (Navier)
- $\vec{u}\times\vec{n} = \vec{0}$ et $\pi = \pi_0$ (C.L. sur la pression)

Ici $\vec{u}$ désigne le champ de vitesses, π le champ de pression, Ω ouvert borné connexe et au moins lipschitzien.

On rappelle que

- $$\operatorname{div} \vec{u} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$$

- $$\overrightarrow{\operatorname{curl}}\, \vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{u} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} \\[2mm] \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} \\[2mm] \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

- $$(D\vec{u})_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

i.e

$$D\vec{u} = \frac{1}{2}\left(\nabla \vec{u} - (\nabla \vec{u})^T\right)$$

- $$\vec{u}_\tau = \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{n})\,\vec{n}$$

Enfin f et α sont des données sur Ω et Γ respectivement

Remarque

i) On se limite ici, à l'exception de la pression π, au cas de conditions aux limites homogènes.

ii) Si le bord de Ω est plat (comme un cube par exemple ou le demi-espace), les conditions aux limites ci-dessus s'écrivent plus facilement.

Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^3_+$, alors la C.L. de type Navier équivaut à :

$$u_3 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0$$

et celle de Navier à :

$$u_3 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \alpha u_1 = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \alpha u_2 = 0$$

1. Le problème (S) avec la C.L. Dirichlet

Comme pour l'équation de Laplace avec la C.L. de Dirichlet, nous allons supposer

$$\vec{f} \in H^{-1}(\Omega)^3$$

et chercher donc $\vec{u} \in H^1_0(\Omega)^3$ vérifiant (S).

Ici nous avons en plus la contrainte

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

et le multiplicateur de Lagrange π.

Tout d'abord, comme π doit vérifier

$$\nabla \pi = \vec{f} + \Delta \vec{u} \in H^{-1}(\Omega)^3$$

il est donc raisonnable de chercher π dans $L^2(\Omega)$. Par ailleurs, on vérifie facil^t qu'un tel π satisfait :

$$\forall \vec{v} \in H^1_0(\Omega)^3, \; \langle \nabla \pi , \vec{v} \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H^1_0(\Omega)} = - \int_\Omega \pi \operatorname{div} \vec{v}$$

L'espace

$$V = \{ \vec{v} \in H^1_0(\Omega)^3 \; ; \; \operatorname{div} \vec{v} = 0 \text{ dans } \Omega \}$$

étant un sous-espace fermé de $H^1_0(\Omega)^3$ est donc un espace de Hilbert.

De plus

$$\forall \vec{v} \in V, \quad \langle \nabla \pi, \vec{v} \rangle_{H^{-1} \times H^1_0} = 0$$

On est maintenant en mesure de proposer une formulation variationnelle du problème (S) :

$$(\mathring{P}_D) \begin{cases} \text{Trouver } \vec{u} \in V \text{ tel que} \\ \forall \vec{v} \in V, \; \displaystyle\int_\Omega \nabla \vec{u} : \nabla \vec{v} = \langle \vec{f}, \vec{v} \rangle_{H^{-1} \times H^1_0} \end{cases}$$

où l'on note que la pression π a "disparu".

Lemme 1

Le problème :

$$(S_D^\circ) \begin{cases} \text{Trouver } (\vec{u}, \pi) \in H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega) \\ \text{vérifiant (S)} \end{cases}$$

est équivalent au problème (P_D°).

Preuve

i) L'implication

$$(S_D^\circ) \Rightarrow (P_D^\circ)$$

est immédiate

Réciproque :

Soit $\vec{u} \in V$ solution de $(\mathcal{P}_D^{\circ})$. Alors, en particulier,

$\forall \vec{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^3$ tel que $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ dans Ω,

on a :

$$(*) \quad \langle -\Delta \vec{u} - \vec{f} \, , \, \vec{v} \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^3 \times \mathcal{D}(\Omega)^3} = 0$$

Comme

$$-\Delta \vec{u} - \vec{f} \in H^{-1}(\Omega)^3$$

et que l'espace

$$\mathcal{V}(\Omega) = \{ \vec{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^3 \; ; \; \operatorname{div} \vec{v} = 0 \text{ dans } \Omega \}$$

est dense dans l'espace V, alors la relation $(*)$ a lieu pour tout V. On sait alors qu'il existe $\pi \in L^2(\Omega)$, unique à une constante additive près, car Ω est connexe, tel que

$$-\Delta \vec{u} - \vec{f} = \nabla(-\pi) \quad \text{dans } \Omega$$

(ce résultat porte le nom de « version du théorème de De Rham » dans $H^{-1}(\Omega)^N$).

Et finalement, comme $\vec{u} \in V$, alors

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad \vec{u} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma.$$

Ce qui termine la démonstration du lemme 1. ∎

<u>Théorème 2</u>

Pour tout $\vec{f} \in H^{-1}(\Omega)^3$, le problème de Stokes (P_D°) possède une solution unique $\vec{u} \in V$ vérifiant en outre

$$\|\vec{u}\|_{H^1(\Omega)^3} \leq C(\Omega) \|\vec{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^3}$$

<u>Preuve :</u>

Il suffit d'appliquer Lax-Milgram. ∎

Remarque.

La théorie est bien connue pour tout ce qui concerne la régularité des solutions lorsque les données le sont :

— solutions $W^{1,p}(\Omega)^3 \times L^p(\Omega)$

— solutions $W^{2,p}(\Omega)^3 \times W^{1,p}(\Omega)$

avec $1 < p < \infty$.

En particulier si $\vec{f} \in L^2(\Omega)^3$ et Ω de classe $C^{1,1}$, alors $\vec{u} \in H^2(\Omega)^3$ et $\pi \in H^1(\Omega)$.

2. Le problème de Stokes avec la condition de type Navier

Ici on s'intéresse encore au problème de Stokes, mais avec la condition au bord :

$$\vec{u}.\vec{n} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\text{curl}}\, \vec{u} \times \vec{n} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma$$

Afin de tenir compte de cette condition au bord, il est important d'écrire l'opérateur laplacien sous la forme :

$$-\Delta = \vec{\text{curl}}\, \vec{\text{curl}} - \nabla \text{div}$$

D'autre part, si on étudie l'existence de solutions faibles $\vec{u}$ dans $H^1(\Omega)^3$, il faudra donner un sens à la condition au bord

$$\vec{\text{curl}}\, \vec{u} \times \vec{n} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma.$$

Rappels (Formules de Green)

- Si $\vec{v} \in L^2(\Omega)^3$ et $\vec{\mathrm{curl}}\, \vec{v} \in L^2(\Omega)^3$, alors

$$\vec{v} \times \vec{n} \in H^{-1/2}(\Gamma)^3$$

et

$$\forall \vec{\varphi} \in H^1(\Omega)^3, \quad \int_\Omega \vec{v} \cdot \vec{\mathrm{curl}}\, \vec{\varphi} - \int_\Omega \vec{\varphi} \cdot \vec{\mathrm{curl}}\, \vec{v} = \langle \vec{v} \times \vec{n}, \vec{\varphi} \rangle_\Gamma$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ désigne le crochet $H^{-1/2}(\Gamma)^3 \times H^{1/2}(\Gamma)^3$.

- Si $\vec{v} \in L^2(\Omega)^3$ et $\mathrm{div}\, \vec{v} \in L^2(\Omega)$, alors

$$\vec{v} \cdot \vec{n} \in H^{-1/2}(\Gamma)$$

et

$$\forall \varphi \in H^1(\Gamma), \quad \int_\Omega \vec{v} \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega \varphi \, \mathrm{div}\, \vec{v} = \langle \vec{v} \cdot \vec{n}, \varphi \rangle_\Gamma$$

Remarque

Si $\vec{v} \in L^2(\Omega)^3$ et $\vec{\mathrm{curl}}\, \vec{v} \in L^{6/5}(\Omega)^3$ (respectivement $\mathrm{div}\, \vec{v} \in L^{6/5}(\Omega)$), alors

$$\vec{v} \times \vec{n} \in H^{-1/2}(\Gamma)^3 \quad (\text{resp. } \vec{v} \cdot \vec{n} \in H^{-1/2}(\Gamma))$$

et les formules de Green ci-dessus restent valables.

Proposition 3

Soit $\vec{v} \in L^2(\Omega)^3$ tel que

$$\overrightarrow{\mathrm{curl}}\, \vec{v} \in L^2(\Omega)^3 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{curl}}\, \overrightarrow{\mathrm{curl}}\, \vec{v} \in L^{6/5}(\Omega)^3$$

Alors

$$\overrightarrow{\mathrm{curl}}\, \vec{v} \times \vec{n} \in H^{-1/2}(\Gamma)^3$$

et on a la formule de Green :

$$\forall \vec{\varphi} \in H^1(\Omega)^3, \quad \int_\Omega \overrightarrow{\mathrm{curl}}\, \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{curl}}\, \vec{\varphi} - \int_\Omega \vec{\varphi} \cdot \overrightarrow{\mathrm{curl}}\, \overrightarrow{\mathrm{curl}}\, \vec{v} = \langle \overrightarrow{\mathrm{curl}}\, \vec{v} \times \vec{n}, \vec{\varphi} \rangle_\Gamma$$

Preuve

Il suffit de poser

$$\vec{w} = \overrightarrow{\mathrm{curl}}\, \vec{v}$$

et d'utiliser les rappels précédents. ▨

On est en mesure de proposer maintenant une formulation variationnelle pour le problème de Stokes (S) avec la condition homogène de type Navier.

Pour cela, on pose

$$V = \{ \vec{v} \in L^2(\Omega) ;\ \vec{\mathrm{curl}}\, \vec{v} \in L^2(\Omega),\ \mathrm{div}\, \vec{v} = 0 \text{ dans } \Omega$$
$$\text{et } \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma \}$$

que l'on munit de la norme du graphe :

$$\|\vec{v}\|_V = \left(\|\vec{v}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\mathrm{curl}\, \vec{v}\|^2_{L^2(\Omega)^3} \right)^{1/2}$$

qui en fait un espace de Hilbert.

On suppose

$$\vec{f} \in L^{6/5}(\Omega)^3,$$

et on va considérer la formulation variat. suivante :

$$(P^\circ_{TN}) \begin{cases} \text{Trouver } \vec{u} \in V \text{ tel que } \forall \vec{v} \in V, \\ \int_\Omega \vec{\mathrm{curl}}\, \vec{u} \cdot \vec{\mathrm{curl}}\, \vec{v} = \int_\Omega \vec{f} \cdot \vec{v} \end{cases}$$

<u>Questions</u>

i) Le problème (P°_{TN}) est-il équivalent au problème (S°_{TN}) ?

ii) Si oui, la forme bilinéaire

$$\begin{array}{ccc} (\vec{u}, \vec{v}) & \longmapsto & \int_\Omega \overrightarrow{\mathrm{curl}}\, \vec{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{curl}}\, \vec{v} \\ V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

est-elle coercive ?

iii) Unicité de la solution ?

Remarque

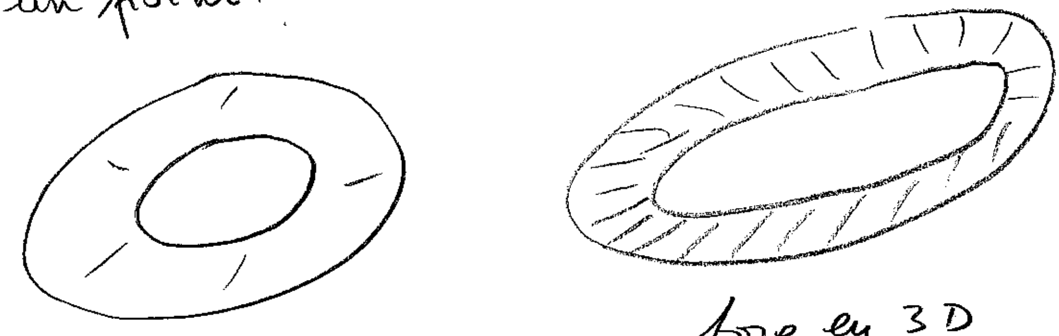
Comme pour le problème de Neumann pour le laplacien, la condition aux limites

$$\overrightarrow{\mathrm{curl}}\, \vec{u} \times \vec{n} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma$$

est « cachée » dans la formulation variationnelle.

Réponses aux questions ii) et iii)

Définition : Ω est simplement connexe si tout chemin fermé, continu de Ω est homotope à un point.



anneau en 2D
non simpl. connexe

tore en 3D
non simpl. connexe

Théorème 4

Soit Ω un ouvert borné de classe $C^{1,1}$

i) Soit $\vec{v} \in L^2(\Omega)^3$ tel que

$\mathrm{div}\,\vec{v} \in L^2(\Omega)$, $\mathrm{curl}\,\vec{v} \in L^2(\Omega)$,

et vérifiant en outre

$\vec{v}.\vec{n} \in H^{1/2}(\Gamma)$ (respt $\vec{v} \times \vec{n} \in H^{1/2}(\Gamma)^3$)

Alors $\vec{v} \in H^1(\Omega)^3$ et on a les estimations:

$$(1)\quad \|\vec{v}\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\Omega)\Big[\|\vec{v}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathrm{div}\,\vec{v}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathrm{curl}\,\vec{v}\|_{L^2(\Omega)} + \|\vec{v}.\vec{n}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \ (\text{respt } \|\vec{v}\times\vec{n}\|_{H^{1/2}(\Gamma)})\Big]$$

ii) Sous les hypothèses ci-dessus, si en outre

$\vec{v}.\vec{n} = 0$ (respt $\vec{v} \times \vec{n} = \vec{0}$) sur Γ

alors on a les estimations suivantes:

$$(2)\quad \|\vec{v}\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\Omega)\Big[\|\mathrm{div}\,\vec{v}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathrm{curl}\,\vec{v}\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{J}\Big|\int_{\Sigma_j}\vec{v}.\vec{n}\Big|$$

$$(3)\quad \Big(\text{respt } \sum_{i=1}^{I}\Big|\int_{\Gamma_i}\vec{v}.\vec{n}\Big|\Big)$$

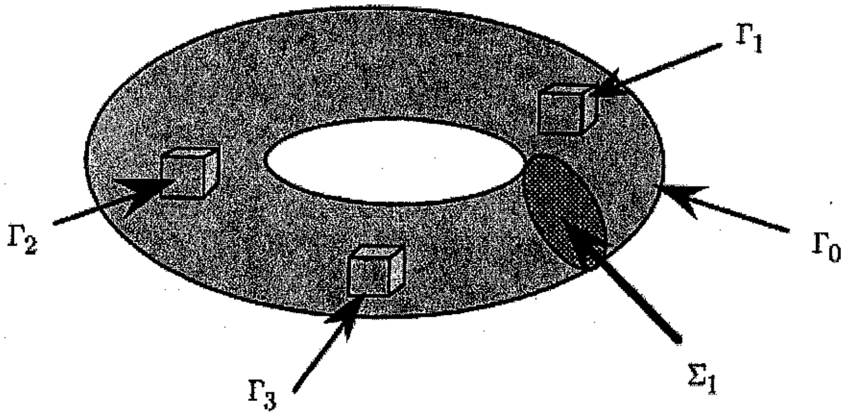


Fig. 1

où

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{I} \Gamma_i \quad , \quad \mathring{\Omega} = \Omega - \bigcup_{j=1}^{J} \Sigma_j$$

avec $\mathring{\Omega}$ ouvert simplement connexe (voir figure).

Remarque

i) Supposons que

$$\vec{v} \in L^2(\Omega)^3 \quad , \quad \operatorname{div} \vec{v} \in L^2(\Omega) \text{ et } \overrightarrow{\operatorname{curl}}\, \vec{v} \in L^2(\Omega)^3$$

et que

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{v} \times \vec{n} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma$$

Prolongeons ensuite $\vec{v}$ par $\vec{0}$ en dehors de Ω. On montre facilement que ce prolongt vérifie:

$$\tilde{v} \in L^2(\mathbb{R}^3)^3 \quad , \quad \operatorname{div} \tilde{\vec{v}} \subset L^2(\mathbb{R}^3) \text{ et } \overrightarrow{\operatorname{curl}}\, \tilde{\vec{v}} \in L^2(\mathbb{R}^3)$$

Comme

$$-\Delta = \overrightarrow{\operatorname{curl}}\, \overrightarrow{\operatorname{curl}} - \nabla \operatorname{div} ,$$

alors $\Delta \tilde{\vec{v}} \in H^{-1}(\mathbb{R}^3)^3$ et donc

$$\tilde{\vec{v}} - \Delta \tilde{\vec{v}} \in H^{-1}(\mathbb{R}^3)^3 ,$$

c'est-à-dire $\tilde{\vec{v}} \in H^1(\mathbb{R}^3)^3$ et par suite

$$\vec{v} \in H^1_0(\Omega)^3$$

ii) Maintenant, notons que

si $\vec{u} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3$

alors

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \vec{u}|^2 = -\int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} . \Delta \vec{u}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} . (\mathrm{curl}\, \mathrm{curl}\, \vec{u}) - \vec{u} . \nabla \mathrm{div}\, \vec{u}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} |\mathrm{curl}\, \vec{u}|^2 + |\mathrm{div}\, \vec{u}|^2.$$

Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^3)^3$,

on déduit que :

$$\forall \vec{u} \in H^1(\mathbb{R}^3)^3 , \quad \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \vec{u}|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\mathrm{curl}\, \vec{u}|^2 + |\mathrm{div}\, \vec{u}|^2$$

iii) Retour au point i) de la remarque :

Comme $\vec{v} \in H^1_0(\Omega)^3$, on a :

$$\|\nabla \vec{v}\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\nabla \tilde{\vec{v}}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} |\mathrm{curl}\, \tilde{\vec{v}}|^2 + |\mathrm{div}\, \tilde{\vec{v}}|^2$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\Omega} |\nabla \vec{v}|^2 = \int_{\Omega} |\mathrm{curl}\, \vec{v}|^2 + |\mathrm{div}\, \vec{v}|^2$$

où l'on notera que cette dernière relation peut aussi être directement établie si $\vec{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^3$ puis par densité de $\mathcal{D}(\Omega)^3$ dans $H_0^1(\Omega)^3$ pour tout $\vec{v} \in H_0^1(\Omega)^3$.

Remarque

i) Si Ω est simplement connexe, alors

$\forall \vec{v} \in H^1(\Omega)^3$ tel que $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ sur Γ,

l'inégalité (2) s'écrit :

$$\|\vec{v}\|_{H^1(\Omega)^3} \leq C(\Omega) \left(\|\operatorname{div} \vec{v}\|_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{curl} \vec{v}\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

ii) si Γ est connexe ($I = 1$), alors

$\forall \vec{v} \in H^1(\Omega)^3$ tel que $\vec{v} \times \vec{n} = \vec{0}$ sur Γ,

l'inégalité (3) s'écrit :

$$\|\vec{v}\|_{H^1(\Omega)^3} \leq C(\Omega) \left(\|\operatorname{div} \vec{v}\|_{L^2(\Omega)} + \|\overrightarrow{\operatorname{curl}}\, \vec{v}\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

Proposition 5

Soit Ω un ouvert borné, convexe de classe $C^{1,1}$ de $\mathbb{R}^3$. Alors, la forme bilinéaire

$$(\vec{u},\vec{v}) \longmapsto \int_\Omega \operatorname{curl}\vec{u}\cdot\operatorname{curl}\vec{v}$$

est coercive sur les espaces V et W suivants :

$$V = \left\{ \vec{v} \in H^1(\Omega)^3 \; ; \; \operatorname{div}\vec{v} = 0 \text{ dans } \Omega, \vec{v}\cdot\vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma \right.$$
$$\left. \text{et } \int_{\Sigma_j} \vec{v}\cdot\vec{n} = 0 \;,\; 1 \le j \le J \right\}$$

$$W = \left\{ \vec{v} \in H^1(\Omega) \; ; \; \operatorname{div}\vec{v} = 0 \text{ dans } \Omega, \vec{v}\times\vec{n} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma \right.$$
$$\left. \text{et } \int_{\Gamma_i} \vec{v}\cdot\vec{n} = 0 \;,\; 1 \le i \le I \right\} \blacksquare$$

On est maintenant en mesure d'étudier le problème $(\mathcal{P}^\circ_{TN})$.

On commence par le cas plus simple où Ω est simplement connexe.

Théorème 6

i) Soit Ω un ouvert borné simplement connexe de classe $C^{1,1}$ de $\mathbb{R}^3$. Alors,

$$\forall \vec{f} \in L^{6/5}(\Omega)^3$$

le problème

$$(P^{\circ}_{TN}) \begin{cases} \text{Trouver } \vec{u} \in V \text{ tel que } \forall \vec{v} \in V \\ \int_\Omega \overrightarrow{\text{curl}}\, \vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{curl}}\, \vec{v} = \int_\Omega \vec{f} \cdot \vec{v} \end{cases}$$

admet une solution unique vérifiant l'estimation

$$\|\vec{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\vec{f}\|_{L^{6/5}(\Omega)}.$$

ii) Le problème (P°_{TN}) est équivalent au problème :

$$(S^{\circ}_{TN}) \begin{cases} \text{Trouver } (\vec{u}, \pi) \in V \times L^2(\Omega) \\ -\Delta \vec{u} + \nabla \pi = \vec{f} \quad \text{dans } \Omega \\ \text{div}\, \vec{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \text{ et } \overrightarrow{\text{curl}}\, \vec{u} \times \vec{n} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

iii) La solution $(\vec{u}, \pi) \in W^{2,6/5}(\Omega)^3 \times W^{1,6/5}(\Omega)$

Preuve

i) L'ouvert Ω étant simplement connexe, alors

$$V = \{ \vec{v} \in H^1(\Omega)^3 ;\ \operatorname{div} \vec{v} = 0 \text{ dans } \Omega,\ \vec{v}.\vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma \}$$

et V est un Hilbert.

Posons ensuite

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \int_\Omega \overrightarrow{\text{curl}}\, \vec{u} \,.\, \overrightarrow{\text{curl}}\, \vec{v} \,.$$

La Proposition 5 montre que la forme a est coercive sur V.

Enfin, la forme

$$l(\vec{v}) = \int_\Omega \vec{f}.\vec{v}$$

est clairement continue car $\vec{v} \in H^1(\Omega)^3 \hookrightarrow L^6(\Omega)^3$

Le théorème de Lax-Milgram implique l'existence d'une solution unique du problème (P^0_{TN}).

ii) Montrons d'abord que

$$(S^{\circ}_{TN}) \Longrightarrow (P^{\circ}_{TN})$$

Posons

$$H = \left\{ \vec{v} \in L^6(\Omega)^3 ;\ \mathrm{div}\,\vec{v} \in L^2(\Omega),\ \vec{v}\cdot\vec{n} = 0 \text{ sur} \right\}$$

On sait que

$\mathcal{D}(\Omega)^3$ est dense dans H

de sorte que l'on peut montrer que le dual de H peut se caractériser de la manière suivante :

$$H' = \left\{ \vec{g} + \nabla x ,\ \vec{g} \in L^{6/5}(\Omega)^3 ,\ x \in L^2(\Omega) \right\}$$

(démonstration similaire à la caractérisation du dual $H^{-1}(\Omega)$ de $H^1_0(\Omega)$)

Soit maintenant

$(\vec{u}, \pi) \in V \times L^2(\Omega)$ sol. de (S°_{TN})

Alors pour tout $\vec{v} \in V$

$$\langle \nabla \pi , \vec{v} \rangle_{H' \times H} = - \int_{\Omega} \pi \,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$$

Par conséquent,

$$-\Delta \vec{u} = \nabla \pi - \vec{f} \in H'$$

Nous avons besoin du lemme suivant :

<u>Lemme</u>.

i) L'espace $\mathcal{D}(\bar{\Omega})^3$ est dense dans l'espace

$$E = \{ \vec{v} \in H^1(\Omega)^3 \text{ tel que } \Delta \vec{v} \in H' \}$$

ii) L'application

$$\vec{v} \longmapsto \text{curl}\, \vec{v} \times \vec{n}$$

définie sur $\mathcal{D}(\bar{\Omega})^3$ peut s'étendre de manière unique en une application linéaire continue de

$\mathcal{D}(\bar{\Omega})^3$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)^3$ où $\mathcal{D}(\bar{\Omega})^3$ est muni de la norme du graphe de E.

iii) De plus, on a la formule de Green :

$\forall \vec{\varphi} \in H^1(\Omega)^3$ tel que $\text{div}\, \vec{\varphi} = 0$ dans Ω et $\vec{\varphi} \cdot \vec{n} = 0$ sur Γ

$\forall \vec{v} \in E$

$$-\langle \Delta \vec{v}, \vec{\varphi} \rangle_{H' \times H} = \int_\Omega \text{curl}\, \vec{v} \cdot \text{curl}\, \vec{\varphi} + \langle \text{curl}\, \vec{v} \times \vec{n}, \vec{\varphi} \rangle_\Gamma$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ désigne le crochet $H^{-1/2}(\Gamma)^3 \times H^{1/2}(\Gamma)^3$

On revient à la preuve du théorème.

Puisque $\vec{u} \in H^1(\Omega)^3$ et $\Delta\vec{u} \in H'$, i.e $\vec{u} \in E$, on peut appliquer ce lemme pour déduire d'une part que la condition $\vec{\text{curl}}\,\vec{u} \times \vec{n} = \vec{0}$ a un sens dans $H^{-1/2}(\Gamma)^3$ et d'autre part

que

$$\forall \vec{v} \in V, \quad \langle -\Delta\vec{u}, \vec{v} \rangle_{H' \times H} = \int_\Omega \vec{\text{curl}}\,\vec{u} \,.\, \vec{\text{curl}}\,\vec{v} = \int_\Omega \vec{f}.\vec{v}$$

i.e

$\vec{u}$ est solution de $(\mathcal{P}^{\circ}_{TN})$.

Réciproquement, soit $\vec{u} \in V$ solution de (P°_{TN}). Alors

$$\text{div}\,\vec{u} = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \vec{u}.\vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma$$

et

$$\forall \vec{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^3 \text{ avec } \text{div}\,\vec{v} = 0 \text{ dans } \Omega$$

on a

$$\langle \vec{\text{curl}}\,\vec{\text{curl}}\,\vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^3 \times \mathcal{D}(\Omega)^3} = \langle \vec{f}, \vec{v} \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^3 \times \mathcal{D}(\Omega)^3}$$

$$\langle -\Delta\vec{u}, \vec{v}\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} = \langle \vec{f}, \vec{v}\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}}$$

Ce qui signifie aussi que $\forall \vec{v}\in \mathcal{D}(\Omega)^3, \operatorname{div}\vec{v}=0$ dans Ω

$$\langle -\Delta\vec{u}-\vec{f}, \vec{v}\rangle_{H^{-1}(\Omega)^3\times H^1_0(\Omega)} = 0$$

et donc il existe, par le théorème de De Rham, une fonction $\pi\in L^2(\Omega)$, unique à une constante additive près, tel que

$$(*) \qquad -\Delta\vec{u}-\vec{f} = \nabla(-\pi) \quad \text{dans } \Omega.$$

(noter que $L^{6/5}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ puisque $H^1_0(\Omega) \underset{\text{densité}}{\hookrightarrow} L^6(\Omega)$).

Il reste à montrer que $\vec{u}$ vérifie :

$$\overrightarrow{\operatorname{curl}}\,\vec{u}\times\vec{n} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma$$

Pour cela, de $(*)$ et de la formule de Green du précédent lemme, on déduit que $\forall\vec{v}\in V$,

$$\langle -\Delta\vec{u}+\nabla\pi, \vec{v}\rangle_{H'\times H} = \int_\Omega \overrightarrow{\operatorname{curl}}\,\vec{u}\cdot\overrightarrow{\operatorname{curl}}\,\vec{v} + \langle\overrightarrow{\operatorname{curl}}\,\vec{u}\times\vec{n}, \vec{v}\rangle_\Gamma$$

c'est-à-dire

$$\forall \vec{v} \in V, \int_\Omega \operatorname{curl}\vec{u}.\operatorname{curl}\vec{v} + \langle \operatorname{curl}\vec{u}\times\vec{n}, \vec{v}\rangle_\Gamma = \int_\Omega \vec{f}.\vec{v}$$

Mais $\vec{u}$ étant solution de (P°_{TN}), alors

$$\forall \vec{v} \in V, \quad \langle \operatorname{curl}\vec{u}\times\vec{n}, \vec{v}\rangle_\Gamma = 0$$

Soit maintenant $\vec{\mu} \in H^{1/2}(\Gamma)$. On sait qu'il existe

$$\vec{w} \in H^1(\Omega)^3, \ \operatorname{div}\vec{w} = 0 \text{ dans } \Omega, \ \vec{w} = \vec{\mu}_\tau \text{ sur } \Gamma$$

où $\vec{\mu}_\tau = \vec{\mu} - (\vec{\mu}.\vec{n})\vec{n}$ est la composante tangentielle de $\vec{\mu}$ sur Γ. Comme $\vec{w} \in V$, on a :

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{curl}\vec{u}\times\vec{n}, \vec{\mu}\rangle_\Gamma &= \langle \operatorname{curl}\vec{u}\times\vec{n}, \vec{\mu}_\tau\rangle_\Gamma \\ &= \langle \operatorname{curl}\vec{u}\times\vec{n}, \vec{w}\rangle_\Gamma \\ &= 0\end{aligned}$$

ce qui signifie que

$$\operatorname{curl}\vec{u}\times\vec{n} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma.$$

iii) <u>Régularité $W^{2,6/5}(\Omega)^3 \times W^{1,6/5}(\Omega)$</u>

Un peu compliqué ...

• <u>Cas Ω non simplement convexe</u>

On montre alors que le noyau :

$$K_T(\Omega) = \{ \vec{u} \in L^2(\Omega)^3 \; ; \; \mathrm{div}\, \vec{u} = 0 \text{ et } \mathrm{curl}\, \vec{u} = \vec{0} \text{ dans } \Omega \, , \; \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma \}$$

est de dimension finie et que la dimension correspond au nombre de coupures Σ_j nécessaires pour obtenir un ouvert $\mathring{\Omega} = \Omega - \bigcup_{j=1}^{J} \Sigma_j$ simplement convexe.

<u>Conséquence 1</u>

Si $V = \{ \vec{v} \in H^1(\Omega)^3 \; ; \; \mathrm{div}\, \vec{v} = 0 \text{ ds } \Omega \text{ et } \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma \}$

alors pour que le problème

$$(P^0_{TN}) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \vec{u} \in V \text{ tel que } \forall \vec{v} \in V, \\ \displaystyle\int_\Omega \mathrm{curl}\, \vec{u} \cdot \mathrm{curl}\, \vec{v} = \int_\Omega \vec{f} \cdot \vec{v} \end{cases}$$

admette une solution, il est nécessaire que

$$\forall \vec{v} \in K_T(\Omega), \; \int_\Omega \vec{f} \cdot \vec{v} = 0$$

et d'autre part si une solution $\vec{u}$ existe, c'est à un élément près de $K_T(\Omega)$.

3. Le problème de Stokes avec la condition de Navier

On rappelle la condition de Navier :

$$[2(\mathbb{D}u)\vec{n}]_{\vec{\tau}} + \alpha \vec{u}_\tau = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma$$

où

$$D\vec{u} = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right)_{1\leq i,j\leq 3}$$

est le tenseur des déformations, α définie sur Γ est le coefficient de friction et $\vec{u}_\tau$ est la composante tangentielle de $\vec{u}$.

Pour simplifier l'exposé, on considérera ici seulement le cas

$$\alpha = 0.$$

Notons que lorsque $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ dans Ω, alors

$$2 \operatorname{div} D\vec{u} = \Delta \vec{u}$$

Lemme

Si $(\vec{u}, \pi) \in H^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)$ est tel que

$$-\Delta\vec{u} + \nabla\pi \in L^{6/5}(\Omega)^3$$

alors

$$\left[(D\vec{u})\vec{n}\right]_{\vec{\tau}} \in H^{-1/2}(\Gamma)^3$$

et

$\forall \vec{\varphi} \in H^1(\Omega)^3$ tel que $\operatorname{div}\vec{\varphi} = 0$ ds Ω et $\vec{\varphi}\cdot\vec{n} = 0$ sur Γ

on a la formule de Green :

$$\int_\Omega (-\Delta\vec{u} + \nabla\pi)\cdot\vec{\varphi} = 2\int_\Omega D\vec{u} : D\vec{\varphi} - 2\langle [(D\vec{u})\vec{n}]_{\vec{\tau}}, \vec{\varphi}\rangle_\Gamma$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Gamma$ désigne le crochet $H^{-1/2}(\Gamma)^3 \times H^{-1/2}(\Gamma)^3$

Avec cette forme de Green, le problème de Stokes peut se formuler sous la forme :

$$(P_N^\circ)\begin{cases} \text{Trouver } \vec{u} \in V, \text{ tel que } \forall \vec{\varphi} \in V, \\ 2\int_\Omega D\vec{u} : D\vec{\varphi} = \int_\Omega \vec{f}\cdot\vec{\varphi} \end{cases}$$

Posons

$$a(\vec{u}, \vec{\varphi}) = \int_\Omega D\vec{u} : D\vec{\varphi}$$

- Si Ω n'est pas axisymétrique, alors cette forme est coercive sur V grâce à l'inégalité de Korn :

$$\|\vec{u}\|_{H^1(\Omega)} \simeq \|D\vec{u}\|_{L^2(\Omega)}$$

si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ sur Γ.

- Si Ω est axisymétrique, ce n'est plus le cas. Il faut alors quotienter par un noyau de dimension finie...

Remarque.

En fait, sur Γ on a la relation :

$$\left[2(\mathbb{D}u)n\right]_{\vec{\tau}} = \overrightarrow{\text{curl}}\,\vec{u} \times \vec{n} - \Lambda \vec{u}$$

où Λ est un opérateur d'ordre 0 :

$$\Lambda \vec{u} = \sum_{k=1}^{2} \left(\vec{u}_{\tau} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial s_k} \right) \vec{\tau}_k$$

où $(\vec{\tau}_1(x), \vec{\tau}_2(x))$ base du plan tangent à Γ au point x et (s_1, s_2) coordonnées locales dans le plan tangent.

Ce qui signifie que sur les questions de régularité, elles peuvent se ramener à celles concernant la condition de type Navier.