Rappelons que si

- $\underline{m \in \mathbb{N}}$, $H^m(\Omega)$ peut être défini de plusieurs manières différentes :

  $*$ $u \in H^m(\Omega) \Longleftrightarrow \forall\, |\alpha| \leq m,\ D^\alpha u \in L^2(\Omega)$

  $*$ $u \in H^m(\Omega) \Longleftrightarrow u = U|_\Omega$ avec $U \in H^m(\mathbb{R}^N)$

  $*$ si $\Omega = \mathbb{R}^N$, $u \in H^m(\mathbb{R}^N) \Longleftrightarrow u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et $(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)$

- $\underline{s = m + \sigma}$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < \sigma < 1$

  $*$ $u \in H^m(\Omega)$ et $\forall\, |\alpha| = m$, $\displaystyle\int_\Omega\int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{N+2\sigma}} < \infty$

  $*$ $u = U|_\Omega$, $U \in H^s(\mathbb{R}^N)$

  $*$ si $\Omega = \mathbb{R}^N$, $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et $(1+|\xi|^2)^{s/2} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)$

  $*$ $H^s(\Omega) = [H^m(\Omega), L^2(\Omega)]_\theta$, $0 < \theta < 1$, $(1-\theta)m = s$

où l'on notera la propriété de réitération :

$$[H^{s_1}(\Omega), H^{s_2}(\Omega)]_\theta = H^{(1-\theta)s_1 + \theta s_2}(\Omega)$$

$$0 < \theta < 1$$

Concernant les espaces $H^s_0(\Omega)$ ou $\widetilde{H}^s(\Omega)$:

- <u>$m \in \mathbb{N}$</u>

$*$ $u \in H^m_0(\Omega) \iff u \in H^m(\Omega)$ et $u = \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = \cdots = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \vec{\nu}^{m-1}} = 0$

sur Γ

$*$ $u \in H^m_0(\Omega) \iff \begin{cases} u = \lim\limits_k u_k \text{ dans } H^m(\Omega) \\ \text{avec } u_k \in \mathcal{D}(\Omega) \end{cases}$

$*$ $u \in H^m_0(\Omega) \iff \tilde{u} \in H^m(\mathbb{R}^N) \iff u \in \widetilde{H}^m(\Omega)$

$*$ $u \in H^m_0(\Omega) \iff \forall\, |\alpha| \leq m,\ \frac{D^\alpha u}{\rho^{m-\alpha}} \in L^2(\Omega)$

- <u>$s = m + \sigma$</u>, $m \in \mathbb{N}$, $0 < \sigma < 1$

$*$ $H^s_0(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^s(\Omega)}}$ et

$u \in \widetilde{H}^s(\Omega) \iff \tilde{u} \in H^s(\mathbb{R}^N)$

$*$ $H^s_0(\Omega) = \widetilde{H}^s(\Omega) \iff s - \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

$*$ $u \in H^s_0(\Omega)$ (avec $\sigma \neq \frac{1}{2}$) $\iff u \in H^m_0(\Omega)$

et $\forall\, |\alpha| = m,\ \frac{D^\alpha u}{\rho^{1/2}} \in L^2(\Omega)$

$u \in \widetilde{H}^s(\Omega) \iff u \in H^s_0(\Omega)$ et $\forall |\alpha| = m,\ \frac{D^\alpha u}{\rho^{1/2}} \in L^2(\Omega)$

* $\left[H_0^{s_1}(\Omega), H_0^{s_2}(\Omega)\right]_\theta = H_0^{(1-\theta)s_1+\theta s_2}(\Omega)$

si $(1-\theta)s_1 + \theta s_2 - \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

$$\left[H_0^{s_1}(\Omega), H_0^{s_2}(\Omega)\right]_\theta = \widetilde{H}^{(1-\theta)s_1+\theta s_2}(\Omega)$$

sinon

<u>Notation de Lions - Magenes</u> : $\widetilde{H}^s(\Omega) = H_{00}^s(\Omega)$

(spécifique au cas où $s - \frac{1}{2} \in \mathbb{N}$)

<u>Quelques cas particuliers</u>

- $\widetilde{H}^{1/2}(\Omega) = H_{00}^{1/2}(\Omega) \hookrightarrow H_0^{1/2}(\Omega) = H^{1/2}(\Omega)$
- $\widetilde{H}^{3/2}(\Omega) = H_{00}^{3/2}(\Omega) \hookrightarrow H_0^{3/2}(\Omega) = H^{3/2}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H^{3/2}(\Omega)$
- $[H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)]_{1/2} = \widetilde{H}^{1/2}(\Omega)$ et $[L^2(\Omega), H^{-1}(\Omega)]_{1/2} = [\widetilde{H}^{1/2}(\Omega)]'$
- si Ω lipschitz et $u \in H^s(\Omega)$, $\frac{1}{2} < s \leq 1$

  alors $u_{|\Gamma} \in H^{s-1/2}(\Gamma)$

- si Ω $C^{1,1}$ et $u \in H^s(\Omega)$, $\frac{3}{2} < s \leq 2$

  alors $u_{|\Gamma} \in H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \in H^{s-\frac{3}{2}}(\Gamma)$

<u>Remarque</u> : Nous verrons + loin qu'on peut améliorer ces résultats

5. Transposition

Soient V et H deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{L}(V; H)$.

Pour tout $g \in H'$ fixé, on considère l'application linéaire

$$x \longmapsto \langle g, Ax \rangle_{H' \times H}$$

$$V \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui définit ainsi une forme linéaire continue sur V qu'on notera ${}^tA g$:

$$\langle {}^tA g, x \rangle_{V' \times V} = \langle g, Ax \rangle_{H' \times H}$$

Remarque.

Si $A : V \longrightarrow H$ est un isomorphisme, alors on peut définir le transposé de A^{-1} et on vérifie facilement que

$${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$$

et

$${}^tA : H' \longrightarrow V'$$

est un isomorphisme.

6. Inégalités

Elles constituent des outils fondamentaux dans l'étude d'équations aux dérivées partielles.

- **Inégalité de Poincaré**

Soit Ω un ouv^t borné dans au moins une direction. Alors il existe une constante $C(\operatorname{diam}\Omega) \geq 0$ telle que

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

- **Inégalité de Poincaré-Wirtinger**

Soit Ω un ouvert borné, connexe et lipschitzien. Alors, il existe une constante $C(\Omega) \geq 0$ telle que

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega), \quad \inf_{K \in \mathbb{R}} \|u + K\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

- **Inégalité de Hardy**

Soit Ω un ouvert borné lipschitzien. Alors, il existe une constante $C(\Omega) \geq 0$ telle que

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \left\| \frac{u}{\rho} \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

- **Inégalité de Calderon-Zygmund:**

$$\forall u \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C(p,\Omega) \|\Delta u\|_{L^p(\Omega)}$$

6. Solutions faibles

Considérons les problèmes suivants :

$$(P_D) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

et

$$(P_N) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = h & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné lipschitzien ; f, g et h sont données.

Résolution du problème de Dirichlet (P_D)

Théorème 14

Pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$ et $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ le problème (P_D) possède une solution unique $u \in H^1(\Omega)$ vérifiant en outre l'estimation

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c(\Omega)\left(\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\right)$$

Preuve :

On commence par relever la condition aux limites de Dirichlet, grâce au Théorème 12 (théorème de traces) :

$$\exists\, u_g \in H^1(\Omega) \text{ tel que } u_g = g \text{ sur } \Gamma$$

$$\|u_g\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\Omega)\, \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

On pose

$$f_g = -\Delta u_g = -\operatorname{div} \nabla u_g \in H^{-1}(\Omega)$$

d'après Proposition 9 ii). On cherchera alors u sous la forme $u = u_g + v$, avec

$$(P_D^\circ) \begin{cases} -\Delta v = f - f_g & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

On montre ensuite que le problème

(*) Trouver $v \in H_0^1(\Omega)$ solution de (P_D°)

est équivalent à la formulation variationnelle suivante :

$$(FV)_D \begin{cases} \text{Trouver } v \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \nabla v . \nabla \varphi = \langle f - f_g, \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \end{cases}$$

Ce dernier problème possède une solution unique en appliquant le lemme de Lax-Milgram ou bien le théorème de Riesz.

On note que la forme bilinéaire

$$a(v, \varphi) = \int_\Omega \nabla v . \nabla \varphi$$

est continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, coercive sur $H_0^1(\Omega)$ grâce à l'inégalité de Poincaré

Par ailleurs, cette forme permet de définir un produit scalaire sur l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$.

$\boxtimes$

Remarque :

i) Si Ω est de classe $C^{1,1}$, $f \in W^{-1,p}(\Omega)$, $g \in W^{1-1/p,p}(\Gamma)$ avec $1 < p < \infty$, alors $\exists ! \, u \in W^{1,p}(\Omega)$ sol. de (P_D).

ii) Si Ω est seulement lipschitz, le résultat reste vrai pour $p \in]2-\varepsilon', 2+\varepsilon[$ où ε et $\varepsilon' > 0$ dépendent de Ω.

Concernant le problème de Neumann, la démarche est un peu plus compliquée. En effet si on cherche une solution $u \in H^1(\Omega)$ seulement, la condition aux limites portant sur la dérivée normale n'a pas de sens, puisque les fonctions de $L^2(\Omega)$ n'ont en général pas de trace au bord ! Ici, en fait, si on pose $\vec{v} = \nabla u$, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \vec{v} \cdot \vec{n} \quad \text{sur } \Gamma$$

<u>Définition</u> :

$$H(\mathrm{div}; \Omega) = \left\{ \vec{v} \in L^2(\Omega) ; \ \mathrm{div}\, \vec{v} \in L^2(\Omega) \right\}$$

Cet espace est un Hilbert pour le produit scalaire

$$((\vec{v}, \vec{w}))_{H(\mathrm{div}; \Omega)} = \int_\Omega \vec{v} \cdot \vec{w} + \int_\Omega (\mathrm{div}\, \vec{v})(\mathrm{div}\, \vec{w})$$

Proposition 15.

i) $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $H(\mathrm{div};\Omega)$

ii) L'application linéaire

$$\vec{v} \longmapsto \vec{v}.\vec{n},$$

définie sur $\mathcal{D}(\bar{\Omega})^N$, peut s'étendre de manière unique en une application linéaire continue de $H(\mathrm{div};\Omega)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma) \overset{\text{déf}}{=} [H^{1/2}(\Gamma)]'$

iii) De plus, on a la formule de Green (ou formule de Stokes) :

$\forall \varphi \in H^1(\Omega)$, $\vec{v} \in H(\mathrm{div};\Omega)$,

$$\int_\Omega \vec{v}.\nabla\varphi + \int_\Omega \varphi \,\mathrm{div}\,\vec{v} = \langle \vec{v}.\vec{n}, \varphi \rangle_\Gamma$$

où $\langle \cdot , \cdot \rangle_\Gamma$ désigne le crochet $H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$

Corollaire 16

Soit $u \in H^1(\Omega)$ tel que $\Delta u \in L^2(\Omega)$. Alors

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \in H^{1/2}(\Gamma).$$

De plus, pour tout $\varphi \in H^1(\Omega)$, on a la formule de Green:

$$\int_\Omega \varphi \Delta u + \int_\Omega \nabla u . \nabla \varphi = \left\langle \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}, \varphi \right\rangle_\Gamma$$

Preuve : Il suffit d'appliquer le Théorème 15 en posant

$$\vec{v} = \nabla u$$

Conséquence :

Grâce à ce corollaire, on montre que les problèmes: pour $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$

$$(P_N) \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = g \quad \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

et

$$(Q_N) \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \forall \varphi \in H^1(\Omega), \ \int_\Omega \nabla u . \nabla \varphi = \int_\Omega f\varphi + \langle g, \varphi \rangle_\Gamma \end{cases}$$

sont équivalents, de sorte que toute solution de l'un est solution de l'autre.

<u>Remarque.</u>

i) L'ouvert Ω étant borné, les fonctions constantes appartiennent à $H^1(\Omega)$. De sorte que si u est solution de (Q_N), prenant $\varphi = 1$, les données f et g doivent satisfaire la condition (nécessaire) de compatibilité

$$\int_\Omega f + \langle g, 1 \rangle_\Gamma = 0$$

ii) L'implicate $(P_N) \Rightarrow (Q_N)$ résulte du Corol 16. L'implication réciproque utilise également la formule de Green ainsi la surjectivité de l'opérateur de $H^1(\Omega)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$. ▨

Théorème 17

Soit Ω un ouvert borné, convexe et lipschitzien de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Soient

$$f \in L^2(\Omega), \quad g \in H^{-1/2}(\Gamma)$$

vérifiant la condition de compatibilité

$$\int_\Omega f + \langle g, 1 \rangle_\Gamma = 0$$

Alors le problème (P_N) possède une solution $H^1(\Omega)$, unique à une constante additive près, vérifiant l'estimation :

$$\|Du\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \right)$$

Preuve :

D'après l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, on a

$$\inf_{K \in \mathbb{R}} \|u + K\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\Omega) \, \|Du\|_{L^2(\Omega)}$$

De sorte que la forme bilinéaire

$$a(u, \varphi) = \int_\Omega Du \cdot D\varphi$$

est coercive sur l'espace quotient :

$$V = H^1(\Omega)\big|_{\mathbb{R}}$$

Il suffit ensuite d'appliquer Lax-Milgram sur l'espace de Hilbert V.

Remarque

i) On aurait pu choisir comme espace V l'espace

$$H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega),$$

où

$$L^2_0(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) ; \int_\Omega v = 0 \right\},$$

lequel est un Hilbert et utiliser ensuite l'inégalité :

$$\forall v \in H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega) \quad , \quad \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

ii) On aurait pu prendre f dans un espace plus gros que $L^2(\Omega)$. Plus précisément si $f \in L^{(2^*)'}(\Omega)$, où $(2^*)'$ est le conjugué de 2^* défini par

$$\frac{1}{2^*} = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{N} & \text{si } N \geq 3 \\ \varepsilon > 0 & \text{arbitraire si } N = 2 \end{cases}$$

i.e $(2^*)' = 2N/(N+2)$ si $N \geq 3$ et $(2^*)' > 1$ si $N = 2$

iii) En théorie L^p, on a des résultats d'existence dans $W^{1,p}(\Omega)$ lorsque Ω est $C^{1,1}$ et $1 < p < \infty$ ou lorsque Ω est $C^{0,1}$ et $2-\varepsilon' < p < 2+\varepsilon$. ▨

La Condition de Fourier-Robin

Il s'agit d'étudier le problème

$$(P_{FR}) \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \\ -\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \alpha u = g \quad \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

où α est une fonction $\geqslant 0$ définie sur Γ, que l'on peut formuler de manière équivalente par :

$$(Q_{FR}) \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \forall \varphi \in H^1(\Omega), \displaystyle\int_\Omega \nabla u . \nabla \varphi + \int_\Gamma \alpha u v \, d\sigma = \int_\Omega f v + \langle g, v \rangle_\Gamma \end{cases}$$

7. Solutions fortes

Théorème 18

Soit Ω un ouvert borné de classe $C^{1,1}$ de $\mathbb{R}^N$. Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{3/2}(\Gamma)$. Alors la solution u donnée par le Théorème 14 appartient à $H^2(\Omega)$ et vérifie l'estimation :

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C(\Omega)\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{3/2}(\Gamma)}\right)$$

Preuve

On note tout d'abord que

$$L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Gamma) \quad \text{et} \quad H^{3/2}(\Gamma) \hookrightarrow H^{1/2}(\Gamma)$$

de sorte que le problème (P_D) a bien une solution unique $u \in H^1(\Omega)$.

On relève ensuite la donnée $g \in H^{3/2}(\Gamma)$ par $u_g \in H^2(\Omega)$ et on pose à nouveau $u = v + u_g$, de sorte que $v \in H^1(\Omega)$ vérifie :

$$\begin{cases} -\Delta v = f + \Delta u_g \in L^2(\Omega) \\ \quad v = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

et l'on se ramène ainsi à montrer que $v \in H^2(\Omega)$. Une des méthodes pour établir cette régularité consiste à utiliser la technique des quotients différentiels qui permet de montrer la régularité locale de v, i.e $v \in H^2_{loc}(\Omega)$, puis la régularité près du bord au moyen de cartes locales qui permettent de se ramener au demi-espace.

La démonstration complète étant longue et fastidieuse, nous allons l'admettre. $\blacksquare$

Remarque :

On peut établir également l'existence de solutions dans $W^{2,p}(\Omega)$ lorsque les données f et g vérifient :

$$f \in L^p(\Omega) \ , \ g \in W^{2-1/p,p}(\Gamma)$$

et que Ω est de classe $C^{1,1}$. $\blacksquare$

8. Solutions très faibles

On suppose ici que Ω est un ouvert borné de classe $C^{1,1}$ et on s'intéresse au problème homogène

$$
(P_D^H) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in L^2(\Omega) \\ \Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \quad u = g \quad \text{sur } \Gamma \end{cases}
$$

où $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

Remarque.

La fonction u appartenant "seulement" à $L^2(\Omega)$, la condition aux limites $u = g$ sur Γ n'a à priori pas de sens.

Mais nous verrons qu'en fait, on peut donner un sens à la trace d'une fonction $L^2(\Omega)$ et harmonique (on peut en fait affaiblir cette dernière hypothèse)

Lemme 19

i) L'espace $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans l'espace

$$E(\Omega;\Delta) = \{ v \in L^2(\Omega) \; ; \; \Delta v \in L^2(\Omega) \}$$

ii) L'application qui à $v \longmapsto v|_\Gamma$ définie sur $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ peut se prolonger de manière unique en une application linéaire continue de

$$E(\Omega;\Delta) \quad \text{dans} \quad H^{-1/2}(\Gamma)$$

iii) De plus, on a la formule de Green :

$$\begin{cases} \forall v \in E(\Omega;\Delta) \, , \quad \forall \varphi \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega v \, \Delta\varphi - \int_\Omega \varphi \, \Delta v = \left\langle v, \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} \end{cases}$$

Preuve :

i) L'idée consiste à utiliser le théorème de Hahn-Banach. Soit donc $l \in [E(\Omega;\Delta)]'$ qui s'annule sur $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ et montrons qu'elle s'annule sur $E(\Omega;\Delta)$.

On sait qu'il existe $(f, g) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ tel que

$$\forall v \in E(\Omega; \Delta), \quad \langle \ell, v \rangle = \int_\Omega f v + \int_\Omega g \Delta v.$$

Soient $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ les prolongements par 0, en dehors de Ω, de f et g respectivement. Alors,

$$\langle \ell, v \rangle = \int_\Omega f v + \int_\Omega g \Delta v, \qquad \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f} v + \int_\Omega \tilde{g} \Delta v$$

i.e

$$\Delta \tilde{g} = -\tilde{f} \quad \text{dans } \mathbb{R}^N.$$

Comme $\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $\Delta \tilde{g} \in L^2(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\tilde{g} \in H^2(\mathbb{R}^N)$$

Par conséquent $g \in H^2(\Omega)$. Le prolongement, $\tilde{g}$, par 0 de g, en dehors de Ω, appartenant à $H^2(\mathbb{R}^N)$, on sait alors que

$$g \in H_0^2(\Omega)$$

Par définition, il existe une suite $(g_k)_k$ de fonct. de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$g_k \longrightarrow g \quad \text{dans } H^2(\Omega)$$

Finalement, soit $v \in E(\Omega;\Delta)$. Alors

$$\langle l, v\rangle = \lim_{k\to\infty}\left[\int_\Omega - v\,\Delta g_k + \int_\Omega g_k\,\Delta v\right]$$

$$= \lim_{k\to\infty} 0$$

$$= 0$$

ii) Soit $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ fixé et $\varphi \in H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)$.

Alors

$$\int_\Omega v\,\Delta\varphi - \int_\Omega \varphi\,\Delta v = \int_\Gamma v\,\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}.$$

Soit maintenant $h \in H^{1/2}(\Gamma)$. D'après le théorème de traces, il existe $\varphi \in H^2(\Omega)$ vérifiant

$$\begin{cases} \varphi = 0 \text{ et } \dfrac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}} = h \quad \text{sur } \Gamma \\ \|\varphi\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \end{cases}$$

car Ω est $C^{1,1}$.

D'où en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|\langle v, \varphi\rangle|_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)} = \left|\int_\Gamma v\,\varphi\right|$$

$$= \left|\int_\Gamma v\,\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}}\right|$$

$$\leq C(\Omega)\left(\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta v\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2} \|\phi\|_{H^2(\Omega)}$$

$$\leq C(\Omega)\,\|v\|_{E(\Omega;\Delta)}\,\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

Ce qui montre que l'application linéaire

$$\begin{aligned} v &\longmapsto v|_\Gamma \\ \mathcal{D}(\bar{\Omega}) &\longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma) \end{aligned}$$

est continue lorsque $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est muni de la norme de $E(\Omega;\Delta)$.

On termine la démonstration en utilisant la densité de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ dans $E(\Omega;\Delta)$.

$\blacksquare$

iii) Immédiat.

Théorème 20

Soit Ω un ouvert borné de classe $C^{1,1}$ de $\mathbb{R}^n$ et soit $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Alors, le problème (P_D^0) possède une solution unique $u \in L^2(\Omega)$ vérifiant l'estimation

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \, \|g\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$$

Preuve

Grâce à la formule de Green ci-dessus, il est facile de voir que $u \in L^2(\Omega)$ est une solution du problème (P_D^0) si et seulement si

$$(*) \begin{cases} \forall \varphi \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega), \\ \int_\Omega u \, \Delta\varphi = \langle g, \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \rangle_\Gamma \end{cases}$$

En effet, soit $u \in L^2(\Omega)$ solution de (P_D^0).
La formule de Green $\Longrightarrow$ $(*)$ a lieu.

Réciproquement, soit $u \in L^2(\Omega)$ solution de $(*)$.

Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$0 = \int_\Omega u \Delta \varphi = \langle \Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)}$$

i.e

$$(**) \qquad \Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

Soit maintenant $\varphi \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$. De $(**)$ et de la formule de Green ci-dessus, on déduit successivement que :

$$0 = \int_\Omega \varphi \Delta u = \int_\Omega u \Delta \varphi - \langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \rangle_\Gamma$$

puis

$$\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \rangle_\Gamma = \langle g, \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \rangle_\Gamma .$$

Le théorème de relèvement de traces montre alors que

$$\forall \mu \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \langle u, \mu \rangle_\Gamma = \langle g, \mu \rangle_\Gamma$$

i.e

$$u = g \quad \text{au sens } H^{-1/2}(\Gamma).$$

Remarque.

On peut établi un résultat similaire pour le problème de Neumann (P_N^0) avec une donné au bord

$$h \in H^{-3/2}(\Gamma) \quad , \quad \langle h, 1 \rangle_\Gamma = 0 . \quad ▨$$

9. Solutions dans $H^s(\Omega)$, $0 < s < 2$

Nous avons établi dans les précédents paragraphes l'existence de solutions dans $H^1(\Omega)$, $H^2(\Omega)$ puis $L^2(\Omega)$ sous des hypothèses en général optimales (sauf pour le problème de Neumann).

Nous allons maintenant examiner le cas des solutions dans $H^s(\Omega)$ avec $0 < s < 2$ et $s \neq 1$. L'ingrédient principal consiste à utiliser l'interpolation (complexe ici).

Théorème 21

Soit Ω un ouvert borné de classe $C^{1,1}$.

1) Supposons

$$\frac{1}{2} < s < 2$$

Alors les opérateurs

i) $$\Delta : H^s(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \longrightarrow H^{s-2}(\Omega) = \left[H_0^{2-s}(\Omega)\right]'$$

si $1 < s < 2$ et $s \neq \frac{3}{2}$

ii) $$\Delta : H_0^{3/2}(\Omega) \longrightarrow \left[H_{00}^{1/2}(\Omega)\right]'$$

iii) Par dualité de i)

$$\Delta : H_0^{2-s}(\Omega) \longrightarrow H^{-s}(\Omega) = \left[H_0^s(\Omega)\right]'$$

si $1 < s < \frac{3}{2}$,

sont des isomorphismes

2) Pour tout $g \in H^s(\Gamma)$ avec $-\frac{1}{2} < s < \frac{3}{2}$, le problème (P_D^H) possède une solution unique $u \in H^{s+\frac{1}{2}}(\Omega)$

Remarque

Que se passe-t-il si Ω est seulement lipschitzien ? Pour quelles valeurs de s peut-on avoir $u \in H^s(\Omega)$?